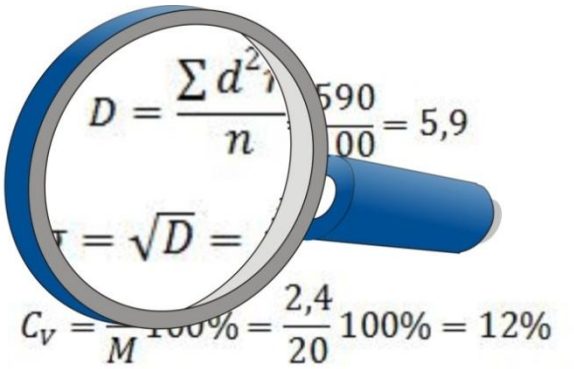
Министерство здравоохранения Архангельской области
Государственное автономное образовательное учреждение среднего профессионального образования Архангельской области «Архангельский медицинский колледж»



А.Г. Бабаджанян
Н.В. Дресвянина

Математика

Учебно-методическое пособие

Архангельск, 2012 г.

Рецензенты:

Алферова О.В., председатель цикловой методической комиссии математических и общих естественнонаучных дисциплин ГАОУ СПО АО «Архангельский торгово-экономический колледж»

Клюшина Л.В. зав. отделом практического обучения ГАОУ СПО АО АМК

Авторы:

Бабаджанян А.Г., преподаватель высшей квалификационной категории ГАОУ СПО АО «Архангельский медицинский колледж»

Дресвянина Н.В., преподаватель высшей квалификационной категории ГАОУ СПО АО «Архангельский медицинский колледж»

Математика: Учебно-методическое пособие/ А.Г. Бабаджанян, Н.В. Дресвянина. – Архангельск: ГАОУ СПО АО АМК, 2012.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы обучающихся по специальностям: Сестринское дело, Лечебное дело, Акушерское дело, Фармация, Стоматология ортопедическая, Лабораторная диагностика.

Тематика и задания выбраны с учетом реализации ФГОС по дисциплине Математика.

В пособии включены теоретические материалы и практические задания для подготовки к занятиям, краткая теоретическая справка по каждой изучаемой теме, тестовые задания для самоконтроля, контрольно-измерительные материалы для зачета. Задания по отработке практических умений разбиты на 3 уровня сложности для дифференцированного подхода в процессе обучения.

К пособию прилагается диск с презентациями и интерактивными тестами для самоконтроля.

П.л. 15,7

Оглавление

Введение **6**
1. Функция. Свойства функций. Область определения функций. **8**
Актуальность темы 8
Цели занятия 8
Ключевые понятия и формулы 8
Проверь себя 11
Вопросы и задания для подготовки к занятию 14
Рейтинг занятия 15
Практические задания 15
2. Предел функции. **20**
Актуальность изучения темы 20
Цели занятия 20
Ключевые понятия и формулы 20
Проверь себя 25
Вопросы и задания для подготовки к занятию 27
Рейтинг занятия 28
Практические задания 29
3. Производная функции **33**
Актуальность темы 33
Цели занятия 33
Ключевые понятия и формулы 33
Проверь себя 40
Вопросы и задания для подготовки к занятию 42
Рейтинг занятия 43
Практические задания 44
4. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях **53**
Актуальность темы 53
Цели занятия 53
Ключевые понятия и формулы 53
Проверь себя 57
Вопросы и задания для подготовки к занятию 59
Рейтинг занятия 60
Практические задания 60
5. Неопределенный интеграл, методы интегрирования. **64**
Актуальность темы 64
Цели занятия 64
Ключевые понятия и формулы 64
Проверь себя 68
Вопросы и задания для подготовки к занятию 71
Рейтинг занятия 71
Практические задания 72
6. Определенный интеграл и его приложение к решению задач **75**
Актуальность темы 75
Цели занятия 75
Ключевые понятия и формулы 75
Проверь себя 79
Вопросы и задания для подготовки к занятию 81
Рейтинг занятия 81
Практические задания 82
7. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике **90**
Актуальность темы 90
Цели занятия 90

Ключевые понятия и формулы 91
Проверь себя 94
Вопросы и задания для подготовки к занятию 95
Рейтинг занятия 96
Практические задания 96
8. Числовые множества, действия над ними. Основные понятия теории графов. 101
Актуальность темы 101
Цели занятия 101
Ключевые понятия и формулы 102
Проверь себя 109
Вопросы и задания для подготовки к занятию 111
Рейтинг занятия 112
Практические задания 112
9. Теория вероятностей. Решение комбинаторных задач 121
Актуальность темы 121
Цели занятия 121
Ключевые понятия и формулы 121
Проверь себя 125
Вопросы и задания для подготовки к занятию 127
Рейтинг занятия 128
Критерии оценки 128
Практические задания 128
10. Математическая статистика. Расчет выборочных характеристик 137
Актуальность темы 137
Цели занятия 137
Ключевые понятия и формулы 138
Проверь себя 147
Вопросы и задания для подготовки к занятию 149
Рейтинг занятия. 150
Практические задания 151
11. Медицинская статистика. Медико-демографические показатели. 161
Актуальность темы 161
Цели занятия 161
Ключевые понятия и формулы 162
Проверь себя 166
Вопросы и задания для подготовки к занятию 167
Рейтинг занятия 168
Практические задания 169
12. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала 178
Актуальность темы 178
Цели занятия 178
Ключевые понятия и формулы 179
Проверь себя 182
Вопросы и задания для подготовки к занятию 183
Рейтинг занятия 183
Входной контроль ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
Практические задания 183
13. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала 191
Актуальность темы 191
Цели занятия 191
Ключевые понятия и формулы 192

Проверь себя 197
Вопросы и задания для подготовки к занятию 199
Рейтинг занятия 199
Практические задания 200
14. Матрицы, определители. Решение системы уравнения методом Крамера. 211
Актуальность 211
Цели 211
Ключевые понятия и формулы 211
Практические задания 216
15. Итоговый контроль 219
Цели занятия: 219
Форма проведения: 219
Критерии оценки 219
Задания для подготовки к итоговому контролю 219
Заключение 223
Приложения 224
Список использованных источников 231
Ответы к практическим заданиям 232

«Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит»
М.В. Ломоносов

Введение

Уважаемые студенты, Вашему вниманию предлагается учебно-методический комплекс по математике.

В медицине математика имеет большое значение, потому что многие явления, изучаемые ею, не могут быть познаны и объяснены без соответствующего математического аппарата. Благодаря совершенствованиям математических методов значительно расширилась область познания основ жизнедеятельности и появились новые высокоэффективные методы диагностики и лечения. Математические методы лежат в основе разработок систем жизнеобеспечения, используются в медицинской технике.

Знание основ математики необходимо, как для успешного изучения соответствующих дисциплин, так и для решения прикладных и исследовательских задач, возникающих перед специалистами различных направлений, в том числе и в медицине.

Курс математики – один из базовых курсов, на которых опираются общепрофессиональные и специализированные дисциплины.

Дисциплина "Математика" изучается студентами первого курса всех групп и специальностей медицинского колледжа. На изучение математики отведено 40 часов (12 – лекции, 28 – практических занятий).

Согласно Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования, в результате освоения дисциплины Математика обучающийся по вышеперечисленным специальностям должен ***уметь:***

- Решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен ***знать:***

- Значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
- Основы интегрального и дифференциального исчисления.

Форма проведения занятий – лекционно-практическая. Лекции призваны дать максимальное изложение учебного материала по соответствующим темам с разбором типичных задач. На практических занятиях проверяется усвоение теоретического материала, разбираются наиболее трудные вопросы, закрепляются полученные знания при помощи решения задач и примеров

прикладного характера. Практические задания ориентированы на три уровня сложности (низкий, средний и высокий) с целью личностно-ориентированного подхода в обучении. Исключение составляет тема «Применение математических методов в профессиональной деятельности», поскольку приведены задачи, решение которых необходимо для дальнейшего изучения клинических дисциплин, профессиональных модулей, а также в работе среднего медицинского персонала.

Каждая тема содержит:

- обоснование выбора темы – *актуальность*;
- *вопросы и задания для подготовки к занятию*, для организации самостоятельной деятельности;
- оценку этапов занятия, рейтинг;
- *ключевые понятия и формулы* (в этом разделе не приводятся строгие математические доказательства, а делается упор на их практическую значимость и возможность применения);
- *тестовые задания для самоконтроля* на понимание теоретического материала;
- *задания практической работы*, решение которых можно организовать дифференцированно в малых группах или индивидуально;
- примерные *задания итогового контроля*.

Результаты усвоения материала оцениваются по рейтинговой системе, принятой в ГАОУ СПО АО АМК. Вы имеете возможность получать дополнительные баллы за выполнение творческих заданий (поиск дополнительной информации по теме, составление задач, кроссвордов, ребусов, презентаций, написание синквейнов и другие формы работ).

Текущий контроль осуществляется на каждом занятии в виде терминологических, графических диктантов, выполнения заданий проверочной работы, проверки выполнения внеаудиторной самостоятельной работы. Зачет проводится на последнем занятии в виде компьютерного тестирования.

Содержание программы дисциплины охватывает практически все основные разделы математического анализа, а также теории вероятностей и математической статистики. Особое внимание уделяется применению математических методов в профессиональной деятельности.

В комплекс включены приложения со справочной информацией, а также небольшим числом примеров для устных вычислений. Одно из приложений посвящено приемам устного счета, навыки которого являются важным элементом общего и математического развития, развивают логическое мышление, память учащихся, быстроту их реакций, воспитывают интерес к математике, умение сосредоточиться, расширяют кругозор учащихся в области математических знаний.

В учебно-методический комплекс включены интерактивные электронные пособия для организации самостоятельной работы в процессе подготовки к занятиям.

Желаем приятного и успешного изучения дисциплины Математика!

1. Функция. Свойства функций. Область определения функций.

Актуальность темы

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. В практических задачах часто имеют дело с переменными величинами, которые связаны между собой так, что значения одной величины определяют значения другой.

Функция – одно из основных математических и общенаучных понятий. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Функция позволяет описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- строить графики;
- анализировать графики функций;
- находить область определения и множество значений функции

Обучающийся должен знать:

- понятие функциональной зависимости; функции многих переменных;
- способы задания функций;
- основные свойства элементарных функций,
- примеры функциональных зависимостей из медицинской практики.

Ключевые понятия и формулы

Функция – зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Обозначение: $y = f(x)$

Способы задания функции:

1) *аналитический* способ (функция задается с помощью математической формулы);
2) *табличный* способ (функция задается с помощью таблицы)
3) *описательный* способ (функция задается словесным описанием)
4) *графический* способ (функция задается с помощью графика).

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1) линейная функция $y = ax + b$, где $a \neq 0$
2) степенн*ая функция* $y = x^n$ где $n \in R$;
3) показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$;
4) логарифмическая функция $y = log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;
5) тригонометрические функции $y = sin\, x, y = cos\, x, y = tg\, x,$ $y = ctg\, x\; y = sec\, x, y = cosec\, x;$
6) обратные тригонометрические функции $y = arcsin\, x,\; y = arccos\, x,$ $y = arctg\, x, y = arcctg\, x.$

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т. е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

Примером неэлементарной функции может служить абсолютная величина (модуль) действительного числа x:

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0 \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Основные свойства функций

1. Область определения функции и область значений функции

Все значения независимой переменной образуют **область определения функции $D(f)$**. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют **область значений функции E(f)**.

2. Нули функции

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю $f(x_0) = 0$.

3. Промежутки знакопостоянства функции

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

4. Монотонность функции

Возрастающая функция (в некотором промежутке) – функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) – функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

5. **Четность (нечетность) функции**

Четная функция – функция, у которой для любого *x* из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой для любого *x* из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6. **Ограниченная и неограниченная функции**

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число М, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений *x*. Если такого числа не существует, то функция неограниченная.

7. **Периодичность функции**

Функция *f(x)* – периодическая, если существует такое отличное от нуля число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

8. **Непрерывность**

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется соотношение

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

9. **Дифференцируемость**

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то ее называют дифференцируемой в точке x_0.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \frac{5-3x}{x^2-4}$.

Решение: Область определения – все значения x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в 0, т.е. функция не определена при $x = \pm 2$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

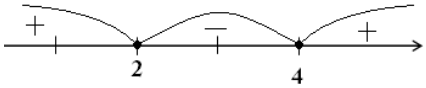
Пример 2. Найти область определения функции $\sqrt{3^{x^2} - 9^{3x-4}}$.

Решение: Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3^{x^2} - 9^{3x-4} \geq 0$$
$$3^{x^2} \geq 9^{3x-4}$$
$$3^{x^2} \geq 3^{2(3x-4)}$$
$$x^2 \geq 2(3x-4)$$
$$x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

Найдем корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$. Это $x_1 = 2;\ x_1 = 4$

Координатную прямую этими точки разделим на промежутки и найдем знак квадратного трехчлена в каждом интервале



Ответ: $D(y) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

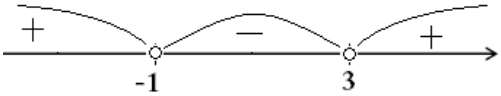
Пример 3. Найти область определения функции $\log_2(-x^2 + 2x + 3)$

Решение: Логарифмируемое выражение должно быть положительным:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

Решаем квадратное неравенство методом интервалов:



Ответ: $D(y) = (-1; 3)$

Пример 4. Выяснить нечетность функции $y(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 5^x$

Решение: $y(-x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} - 5^{-x} = 5^x - \left(\frac{1}{5}\right)^x = -\left(\left(\frac{1}{5}\right)^x - 5^x\right) = -y(x)$

Ответ: Функция по определению нечетная

Проверь себя

1. Укажите пару $(x; y)$, находящуюся в отношении $y = 2^x$
   1) (2;1)
   2) (3;8)
   3) (-1;-2)
   4) (1;0)
2. Укажите пару $(x; y)$, находящуюся в отношении $y \leq 2x + 1$
   1) (-1;-2)
   2) (1;2)
   3) (-6;-5)
   4) (0;3)
3. Установите соответствие между функциями и областью их определения

1)	$y = \dfrac{3x}{2x-6}$	а)	$(-3; +\infty)$
2)	$y = \sqrt{-3x}$	б)	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
3)	$y = \sqrt{5x}$	в)	$(-\infty;\ 0]$
4)	$y = \log_2(x+3)$	г)	$[0; +\infty)$

4. Область определения функции $y = \ln(x + 5)$

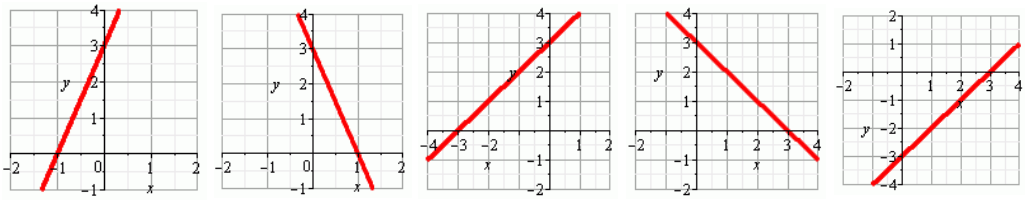
1) (-∞; +∞)
2) (-∞; 5)
3) [-5;+∞)
4) (-5;+∞)

5. Область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 4}$

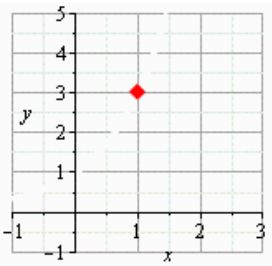
1) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
2) $(-2; 2)$
3) $R \backslash \{-2; 2\}$
4) $(-\infty; +\infty)$

6. Среди приведенных графиков укажите график функции $y = 3 - x$

1 2 3 4 5



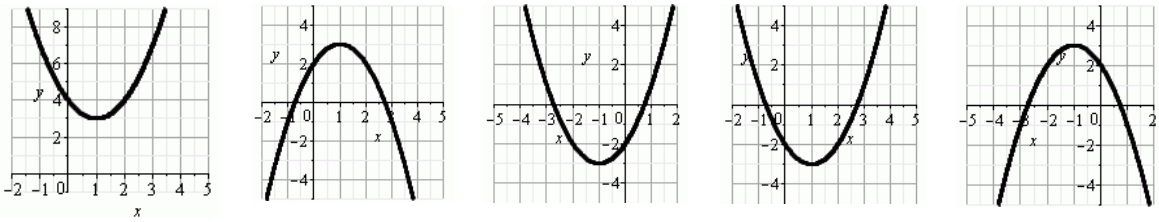
7. График функции $f(x)$ проходит через показанную на рисунке точку. Укажите функцию $f(x)$.



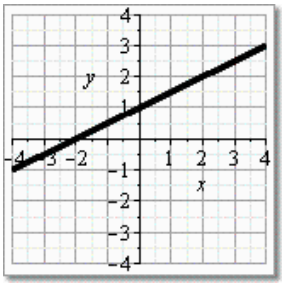
1) $f(x) = -x$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f(x) = \log_2 x$ 4) $f(x) = x^3$ 5) $f(x) = 3^x$

8. Среди приведенных графиков укажите график функции $y = 3 - (x + 1)^2$

1 2 3 4 5



9. По виду графика функции $y = kx + b$ определите знаки коэффициентов k и b. Выберите правильное утверждение

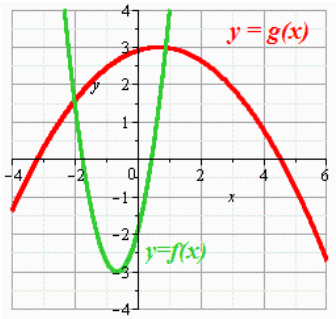


1) k>0, b<0
2) k<0, b>0
3) k<0, b<0

4) k>0, b>0

5) k=0, b>0

10. На рисунке изображены графики функций $y = f\ (x)$ и $y = g\ (x)$, заданных на промежутке $[-4;\ 6]$. Укажите все значения x, для которых выполняется неравенство $f\ (x)\ \leq\ g\ (x)$



1) $[-2; 1]$

2) $[-3; 3]$

3) $(-\infty; -2]$

4) $[1; +\infty)$

5) $[-2; 3]$

11. Укажите наименьшее значение функции

$y = 5 + \sqrt{(x-4)}$

1) 4

2) 6

3) 5

4) –1

5) 1

12. Укажите чётную функцию из перечисленных ниже

1) $y = x$

2) $y = 2^x$

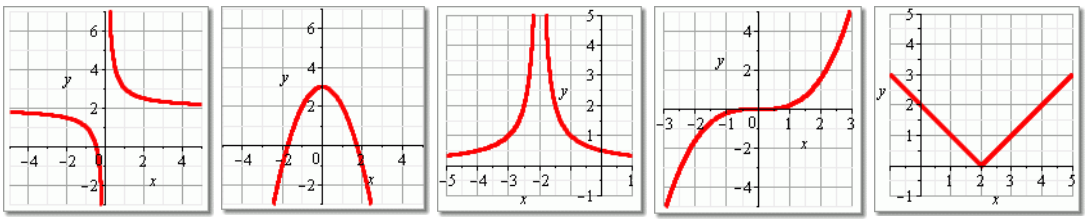
3) $y = tgx$

4) $y = \log_2 x$

5) $y = x^2$

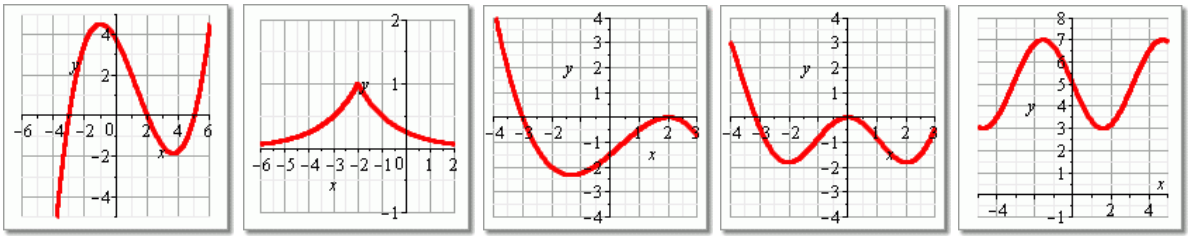
13. На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите номер этого рисунка

1) 2) 3) 4) 5)



14. Укажите график функции, возрастающей на отрезке $[-1;\ 2]$

1) 2) 3) 4) 5)



15. Укажите множество значений функции $y = 1{,}5 + e^x$

1) $(-\infty; +\infty)$
2) $(1{,}5; +\infty)$
3) $(-\infty; 1{,}5)$
4) $(0; +\infty)$

Эталон ответов: **1.** 2); **2.** 1); **3.** 1) – б), 2) – в), 3) – г), 4) – а); **4** . 4); **5.** 1); **6.** 4); **7.** 5); **8.** 5); **9.** 4); **10.**1); **11.** 3); **12.**5); **13.**4); **14.**3); **15**. 2

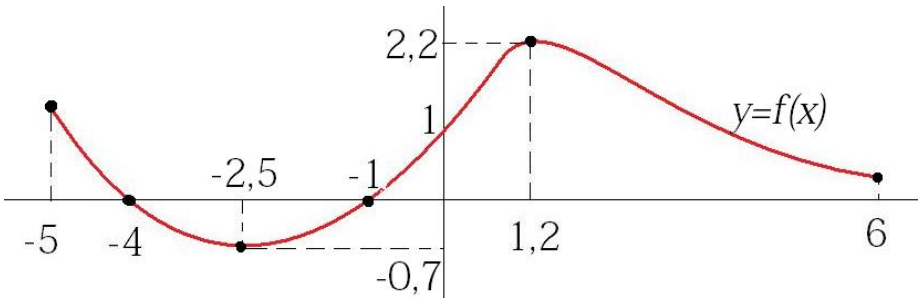
Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Дайте определение функциональной зависимости, функции многих переменных.
2. Приведите примеры использования функций в медицине.
3. Перечислите способы задания функций.
4. Изобразите графики основных элементарных функций.
5. Приведите примеры элементарных функций, которые:
    1. монотонны на всей области определения;
    2. имеют ограниченную область значений (не является промежутком (–∞;+∞));
    3. четные;
    4. нечетные;
    5. периодичные;
    6. не имеют нулей функции;
    7. не имеют точек минимума и максимума.
6. Составьте кроссворд по теме «Функция. Свойства функций»
7. Выполните задания:

    1. Найдите область определения функций

        1) $y = x^2 - 6x$
        2) $y = \frac{1}{3x}$
        3) $y = \sqrt{x+5}$
        4) $y = \sqrt[4]{-x}$
        5) $y = \log_2 \frac{1}{1-x}$

    2. Опишите свойства графика функции на рисунке:



Ответы:

1. Области определения функций

1) $D(y) = R$

2) $D(y) = R\backslash\{0\}$

3) $D(y) = [-5; +\infty)$

4) $D(y) = (-\infty; 0]$

5) $D(y) = (-\infty; 1)$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»;
9-10 баллов «4»;
6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

1.1. Укажите пару $(x;\ y)$, находящуюся в отношении $y = 2x + 5$.

(0; 5), (-1; 3), (5; 0), (2; 1)

1.2. Укажите пару $(x;\ y)$, находящуюся в отношении $y \leq x - 2$.

(2; 2), (-3; 0), (1; –3), (2; 0)

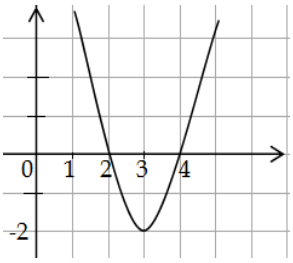
1.3. Укажите пару $(x;\ y)$, находящуюся в отношении $y = 2^x$.

(8; 3), (4; 16), (3; 16), (3; 8)

1.4. Укажите пару $(x;\ y)$, находящуюся в отношении $y = \log_2 x$.

(16; 4), (4; 16), (8; 3), (3; 8)

1.5. Функция задана графиком (см. рис).



а) Укажите область определения этой функции.
б) Укажите область значений этой функции.
в) Укажите промежутки, где функция принимает отрицательные значения.
г) Промежутки, где функция принимает положительные значения.

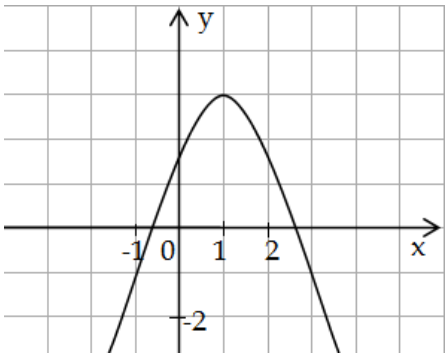
1.6. Принадлежит ли графику функции $y = 0{,}5x - 20$ точка В $(10; 10)$

1.7. Принадлежит ли графику функции $y = -4x + 1$ точка Е $(-2; 9)$

1.8. Принадлежат ли графику функции $y = \begin{cases} x^2 - 1, \text{при } x > 2 \\ 3x, \quad \text{при } x \le 1 \end{cases}$ точки $M(3; 8)$, $K(1; 3)$, $P(2; 3)$

1.9. Имеются статистические данные рождаемости в Архангельской области по районам за первые 6 месяцев 2011 г. (по данным МИАЦ Архангельской области). Определите по графику: а) 3 района, в которых рождаемость максимальная; б) 2 района с минимальной рождаемостью.

1.10. Используя график функции $y = f(x)$, определите, какое утверждение верно.



а) $f(3) = 0$.
б) Функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.
в) Наибольшее значение функция принимает при $x = 3$.
г) $f(-1) = -1$.

1.11. Опишите свойства графика, представляющей электрокардиограмму здорового человека.

1.12. Постройте график функции $y = 2x + 5$. Какие значения она принимает при $-2 \leq x \leq 1$?

1.13. Постройте график функции $y = \frac{5-x}{2}$. Какие значения она принимает при $-1 \leq x \leq 4$?

1.14. Построить график линейной функции $y = -3x + 4$. Назовите ее область значений при $-2 \leq x \leq 5$.

1.15. Постройте график функции $y = \frac{x^2+x}{x}$. Укажите ее область значений.

1.16. Постройте график функции $y = (x - 3)^2 - 2$. Укажите ее область значений.

1.17. Постройте график функции $y = -2x^2 + 5x - 2$. Какие значения принимает функция, если $2 \leq x \leq 3$?

1.18. Вычислите координаты точек пересечения графиков функций

а) $y = 0{,}2x + 11$ и $y = -0{,}1x + 26$
б) $y = -x - 2{,}5$ и $y = 4x - 7{,}5$
в) $y = x + 0{,}5$ и $y = 3x - 5{,}5$
г) $y = x^3$ и $y = 2x^2$

Найдите области определения функций:

1.19. $y = \sqrt{-1{,}5x^3}$

1.20. $y = \sqrt[3]{2x - 1}$

1.21. $y = \sqrt[5]{\frac{x}{2-x}}$

Выясните, является ли функция четной, нечетной или ни четной, ни нечетной:

1.22. $y = |x|$

1.23. $y = 4x$

1.24. $y = \frac{1}{2+x^4}$

1.25. $y = 2x^3 + 1$

II уровень

1.26. По перечисленным ниже свойствам постройте примерный график функции:

а) Область определения D(f): $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
б) Область значений E(f): $y \in (-\infty; \infty)$
в) Нули функции при *x= –4, x= –1*;
г) $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1)$; $f(x) > 0$ при $x \in (-4; -1) \cup (1; \infty)$
д) Точка максимума при $x = -2, y = 1$
е) График функции возрастает при $x \in (-\infty; -2)$
ж) График функции убывает при $x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$
з) при $x \in (-\infty; 1)$ график функции выпуклый вверх, при $x \in (1; +\infty)$ график функции вогнутый вниз

1.27. По перечисленным ниже свойствам постройте примерный график функции:

а) Область определения D(f): $[1; 6)$;
б) Область значений E(f): $y \in (-\infty; 3]$
в) Нули функции при $x = 5$;
г) $f(x) < 0$ при $x \in (5; 6)$; $f(x) > 0$ при $x \in [1; 5)$
д) Точка максимума при $x = 4$ $y = 3$, точка минимума при $x = 2, y = 1$,
е) Дополнительная точка: при $x = 1, y = 2$
ж) График функции убывает при $x \in [1; 2] \cup [4; 6)$
з) График функции возрастает при $x \in [2; 4]$
и) На промежутке $x \in (1; 3)$ график вогнутый, при $x \in (3; 6)$ график выпуклый

Найдите области определения функций:

1.28. $y = \sqrt{x^2 - 9}$

1.29. $y = \sqrt{4 - x^2}$

1.30. $y = \frac{3x}{\sqrt{x^2-25}}$

1.31. $y = \sqrt{-\frac{x-2}{1+x}}$

1.32. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

1.33. $y = \sqrt{\frac{4x-6}{2x}}$

1.34. $y = ln\frac{x^3}{x-2}$

1.35. $y = \log_2(3x - 1)$

1.36. $f(x) = log_{0,5}(3 - 2x)$

1.37. $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$

1.38. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

1.39. $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$

1.40. $y = log_3(-2x^2 - x + 1)$

1.41. $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$

Найдите множество значений E(f) функций:

1.42. $y = x^2 - 6x + 5$

1.43. $y = 3 + 2sin\,x$

1.44. $f(x) = 2sinx - 1$

1.45. $f(x) = -5cosx$

1.46. $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Выясните, является ли функция четной, нечетной или ни четной, ни нечетной:

1.47. $y = \frac{x^3}{x^2+5}$

1.48. $y = \frac{1}{1+x^5}$

1.49. $y = x^4\sqrt[3]{x}$

1.50. $y = cosx + x^2$

1.51. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

1.52. $f(x) = x^2 + 5x$

III уровень

Найдите область определения функций

1.53. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

1.54. $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}$

1.55. $y = \sqrt{x-3} - \frac{1}{\sqrt{x-6}}$

1.56. $f(x) = \frac{x-3}{3^{x+4}-9}$

1.57. $f(x) = \frac{x^2-4x-3}{x^2-5x+4}$

1.58. $f(x) = \left(log_{\frac{1}{2}}x\right)^{\frac{1}{4}}$

1.59. $f(x) = lg\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$

1.60. $f(x) = 2\sqrt{x-1} - \frac{5}{\sqrt{4-x}}$

1.61. $f(x) = \sqrt[6]{2 - log_5 5x}$

1.62. $f(x) = \sqrt[4]{log_5 x - 3}$

1.63. $f(x) = \sqrt{2^{3x+1} - 16}$

1.64. $f(x) = \sqrt{1 - 7^{x^2} \cdot 49^x}$

1.65. $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} - 1}$

1.66. $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{2}x-7}}$

1.67. $f(x) = \sqrt{lg(2 - \sqrt{x-1})}$

1.68. Выясните, является ли функция четной, нечетной или ни четной, ни нечетной:

а) $y = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ x^4, x \geq 0 \end{cases}$ б) $f(x) = lg\frac{x+3}{x-3}$

2. Предел функции.

Актуальность изучения темы

Теория пределов играет основополагающую роль в математическом анализе, позволяет определить характер поведения функции при заданном изменении аргумента. С помощью предела можно выяснить, имеет ли функция в заданной точке разрыв. Через пределы определяются такие понятия математики как производная, неопределенный и определенный интегралы, составляющие основу дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь получили непосредственное применение в медицинской практике. Пределы являются основным средством в построении теории рядов.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- вычислять пределы функций в точке и на бесконечности;
- раскрывать неопределенности.

Обучающийся должен знать:

- место понятия предела в математическом анализе;
- понятие предела функции в точке и на бесконечности;
- теоремы о пределах;
- понятие бесконечно малой, бесконечно большой функции;
- виды неопределенностей, способы их раскрытия;
- замечательные пределы.

Ключевые понятия и формулы

Определение предела функции в точке.

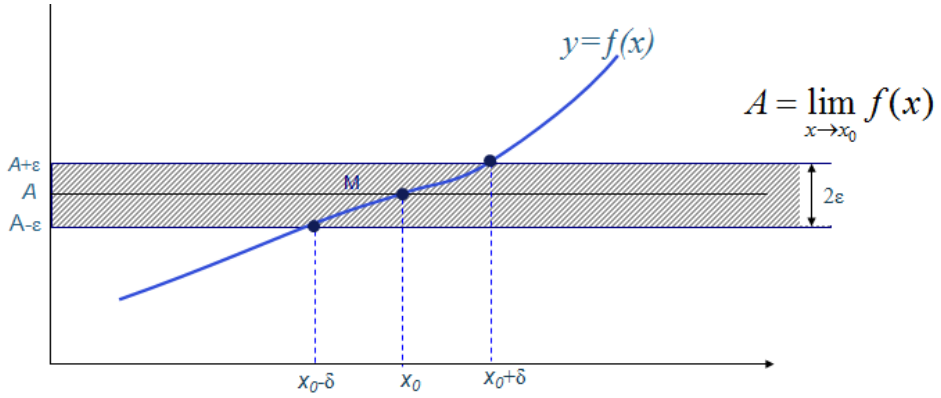
Определение предела функции (по Коши)

Пусть задана функция $y = f(x)$, которая определена в окрестности точки x_0, за исключением быть может самой точки x_0

Число ***A*** называется ***пределом функции f(x)*** при ***x***, стремящемся к $\boldsymbol{x_0}$, если для любого положительного числа $\boldsymbol{\varepsilon}$, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число $\boldsymbol{\delta}$, что для всех ***x***, удовлетворяющих неравенству $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$, справедливо неравенство $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon}$. При этом используется запись:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Геометрическая интерпретация предела функции в точке.



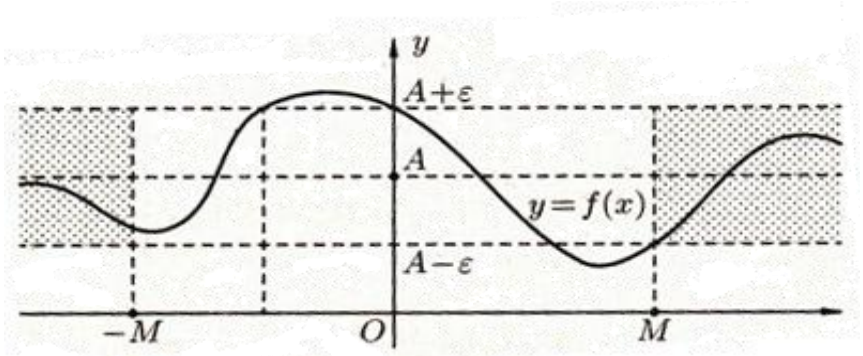
Определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Определение. Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если какое бы положительное число ε ни взять, найдется такое положительное число М, что для всех x таких, что при $|x| > M$ выполнится неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом записывают

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Геометрическая интерпретация предела функции на бесконечности



Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Теоремы о пределах

$$\lim_{x \to a}(x \pm y) = \lim_{x \to a} x \pm \lim_{x \to a} y \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\lim_{x \to a}(x \cdot y) = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} y \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{y}=\frac{\lim\limits_{x\to a}x}{\lim\limits_{x\to a}y} \qquad (2.3)$$

Свойства пределов

$$\lim_{x\to a}C=C;C=const \qquad (2.4)$$

$$\lim_{x\to a}Cx=\mathrm{C}\cdot\lim_{x\to a}x;\ C=const \qquad (2.5)$$

$$\lim\frac{C}{0}=\infty;\ C=const \qquad (2.6)$$

$$\lim\frac{C}{\infty}=0;\ C=const \qquad (2.7)$$

I замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1 \qquad (2.8)$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{bx}=\frac{a}{b} \qquad (2.9)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\frac{a}{b} \qquad (2.10)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \qquad (2.11)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1 \qquad (2.12)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1 \qquad (2.13)$$

II замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (2.14)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad (2.15)$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{m}-1}{x}\right)^{x}=m \qquad (2.16)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=lna \qquad (2.17)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1 \qquad (2.18)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{n}-1}{x}=n \qquad (2.19)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad (2.20)$$

Виды неопределенностей

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 0\cdot\infty$$

Числовые ряды

Числовой ряд – выражение вида $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – члены ряда.

Общий член ряда – a_n с произвольным номером.

Сокращенно ряд обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Частичные суммы ряда – суммы конечного числа членов ряда

$S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

Пример: $S_3 = a_1+a_2+a_3$

Сходящийся ряд – это ряд, у которого последовательность его частичных сумм имеет конечный предел при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Сумма ряда – число S, к которому сходится эта последовательность частичных сумм:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Расходящийся ряд – ряд, у которого $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

Знакоположительный ряд - ряд, все члены которого положительны

Пример: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ – знакоположительный, члены ряда:

$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{2}{5},\quad a_3=\frac{3}{10},\dots$

Знакочередующийся ряд – члены ряда попеременно положительны и отрицательны

Пример: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ – знакочередующийся, члены ряда:

$a_1=\frac{-1}{2},\ a_2=\frac{1}{5},\ a_3=\frac{-1}{10},\dots$

Степенной ряд – членами ряда являются степенные функции аргумента *x*

Пример: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ – степенной, члены ряда: $a_1=\frac{x}{2},\quad a_2=\frac{x^2}{5},\quad a_3=\frac{x^3}{10},\dots$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+x^2}{2x+1}$

Решение: т. к. $x = 4$ внутренняя точка области определения функции, значит функция непрерывна в этой точке. Подставляем вместо x значение 4: $\frac{\sqrt{4}+4^2}{2\cdot 4+1} = \frac{18}{9} = 2$

Ответ: 2.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

Решение: т.к. числитель и знаменатель при $x \to -3$ обращаются в 0 (неопределенность $\frac{0}{0}$), то применить теорему о пределе отношения нельзя. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю: $\left(\sqrt{x+4}+1\right)$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}{\left(\sqrt{x+4}-1\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}{(x+4-1)} = \lim_{x\to -3}\left(\sqrt{x+4}+1\right) = 2$$

Ответ: 2.

Пример 3. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-5x-2}$.

Решение: Непосредственное применение теорем о пределах приводит к неопределенному выражению вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители, и сократим дробь на множитель $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-5x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(3x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(3x+1)} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

Ответ: $1\frac{5}{7}$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{3x+4}$

Решение: делитель стремится к ∞, значит, обратное ему число стремится к бесконечно малому числу, т.е. 0. Следовательно, произведение $\frac{1}{3x+4} \cdot 2 \to 0$, если $x \to \infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{3x+4} = 0$

Ответ: 0

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x^2+x+7}{x^3+4}$

Решение: При стремлении x к ∞, числитель и знаменатель стремятся к ∞, т.е. имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределенности почленно разделим числитель и знаменатель на x с наибольшим показателем степени (x^3), применим свойства пределов:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to 4}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}=\frac{3-0+0+0}{1+0}=3$$

Ответ: 3

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{5x}$.

Решение: Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ воспользуемся тригонометрическим тождеством, свойствами дробей и первым замечательным пределом (формула 2.8.)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin3x}{cos3x}\cdot\frac{1}{5x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{cos3x}\cdot\frac{3\cdot sin3x}{3\cdot 5x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos3x}\times$$

$$\times\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}=1\cdot\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}$$

Примечание: можно вычислить предел, используя следствие I замечательного предела (формула 2.11.)

Ответ: 0,6

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x}\right)^{3x}$

Решение: Преобразуем дробь, применим свойства степени, воспользуемся вторым замечательным пределом (формула 2.14)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{\frac{x\cdot 3\cdot 8}{8}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{x}\right)^{\frac{x}{8}}\right]^{24}=e^{24}$$

Ответ: e^{24}

Проверь себя

Выберите один правильный ответ:

1. Понятие предела функции в математическом анализе применяется
   1) при исследовании функций;
   2) в определении производной;
   3) в интегральном исчислении;
   4) в теории рядов;
   5) все перечисленное верно.
2. Верно ли, что функция $y=\frac{x+1}{x^2}$ является бесконечно малой при x, стремящемся к 0? (ответьте да/нет)
3. Верно ли, что функция $y=\frac{x^2+1}{x}$ является бесконечно большой при x, стремящемся к бесконечности) (ответьте да/нет)

4. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и выполняется равенство $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция в точке x_0
   1) бесконечно большая,
   2) непрерывна,
   3) имеет разрыв,
   4) бесконечно малая.
5. Предел $\lim_{x\to -1}(1 - x^3)$ равен … (впишите ответ)
6. Предел $\lim_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)$ равен … (впишите ответ)
7. Установите соответствие между пределами и видами неопределенностей

1)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{2x-x^2}$	а)	$\dfrac{\infty}{\infty}$
2)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2x^2}\right)$	б)	$\dfrac{0}{0}$
3)	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3-1}{2-x^2}$	в)	$\infty - \infty$

8. Установите соответствие между пределами и методом их вычисления

1)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{2x-x^2}$	а)	умножение и деление на сопряженное
2)	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{2-x}\right)$	б)	сокращение дроби
3)	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^x$	в)	применение I замечательного предела
4)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin4x}{2x}$	г)	применение II замечательного предела

9. Установите соответствие между пределами и их значениями

1)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-x}{x}$	а)	$-\dfrac{1}{2}$
2)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+x}$	б)	3
3)	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3}{x^5+2}$	в)	∞
4)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{sin2x}$	г)	0
5)	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^5}{x^5+2}$	д)	2

10.Какой из представленных рядов знакочередующийся

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$

Эталон ответов

1. 5)
2. Нет
3. Да
4. 2)
5. 2
6. 3
7. 1-б, 2-в, 3-а
8. 1-б, 2-а, 3-г, 4-в
9. 1-а, 2-в, 3-г, 4-д, 5-б
10. 3)

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Место теории пределов в математическом анализе.
2. Определение предела функции (Коши) в точке и на бесконечности.
3. Теоремы о пределе суммы, произведения, частного функций.
4. Определение непрерывности функции.
5. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и способы ее раскрытия.
6. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ и способы ее раскрытия.
7. Неопределенность вида $\infty - \infty$ и способы ее раскрытия.
8. I, II замечательные пределы.
9. Понятие числового ряда, частичная сумма, сходящийся и расходящийся ряды.
10. Выполните задания:

1) Вычислите пределы функций. Что объединяет данные пределы?

а) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$

б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3}{2x-6}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$

2) Вычислите пределы функций. Какой вид неопределенностей встречается в данных пределах? Назовите способы устранения неопределенностей.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3+x}{x}$ *в*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

б) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$ *г*) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

3) Вычислите пределы функций. По какому признаку сгруппированы данные задания?

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{3x^3+x^2-26}\quad б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}\quad в)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x^2-1}{8x^2-6x+3}$$

Проанализируйте задания и выведите правило, как сразу можно дать ответ в пределе дроби при раскрытии неопределенности ∞/∞

4) Вычислите значения пределов функций. Сгруппируйте задания по виду предела:

$$а)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}\quad в)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{2x}$$

$$б)\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}\quad г)\ \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$$

5) Напишите 5 первых членов числовых рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$

Ответы:

1. а) -6, б) ∞, в) 1, г) ∞; **2.** а) 1; б) 0,2; в) 4; г) 0,5; **3.** 1/3, 0, ∞, **4.** а) 2/3, б) 3/5, в) $e^{10/3}$, г) e^{10}.

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»
9-10 баллов «4»
6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

2.1. Вычислите предел функции $y = 3x^2 - 5x + 1$ при $x \to -2$

2.2. Вычислите предел функции $y = \frac{x^5+3x}{x+17}$ при $x \to 2$

Вычислите пределы:

2.3. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+7}{8-x}$

2.4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+1}{x-3}$

2.5. $\lim\limits_{\alpha\to -1} \frac{5+2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2+3\alpha-2}$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0} (2^x + 3x + 1)$

2.7. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{8x^3-2x-3}{-x^2-1}$

2.8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5}{1-x}$

2.9. $\lim\limits_{x\to 27} \frac{-1}{\sqrt[3]{x}-3}$

2.10. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5}{x+7}$

2.11. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16}\right)$

2.12. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(5 + \frac{3}{n^2}\right)$

2.13. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^4-3x+1}{x^2+7}$

2.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{ctgx}$

2.15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2-2x}{2x^2+5x}$

2.16. $\lim\limits_{n\to \infty} \frac{3n^2-4}{7+5n-n^2}$

2.17. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\frac{1}{6n} + \frac{5n}{3n-2}\right)$

2.18. $\lim\limits_{n\to \infty} \frac{5n^3-3n}{n^4-2}$

2.19. Вычислите пятый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n-1}}$

2.20. Вычислите четвертый член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n+2}$

2.21. Вычислите шестой член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n-1}$

2.22. Вычислите частичную сумму S_3 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

2.23. Вычислите частичную сумму S_2 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

2.24. Вычислите частичную сумму S_3 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n}$

II уровень

2.25. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$

2.26. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

2.27. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

2.28. $\lim\limits_{x\to \sqrt{7}}\dfrac{x^4-49}{x^2-7}$

2.29. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$

2.30. $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{x^2-11x-60}{x^2-225}$

2.31. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$

2.32. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^3+27}$

2.33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

2.34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$

2.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

2.36. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$

2.37. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$

2.38. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$

2.39. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$

2.40. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

2.41. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$

2.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$

2.43. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{cosx}{sin2x}$

2.44. $\lim_{x\to 0}\frac{cosx-cos^3x}{sin^2 2x}$

2.45. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-n-n^2}{6n-n^3+1}$

2.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+n^3-n+3}{n^4-3n^3+8n^2-5}$

2.47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+6n^2+5n-2}{4n^4-n^3+3n^2+7}$

2.48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-6x^3+x}{7x^4+x^2-1}$

2.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-1}{x^3+2}$

2.50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+5}{2x^3+5x^2-x}$

2.51. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x^3+x+1}{7x^3+x^2-5x^5}$

2.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

2.53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$

2.54. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$

2.55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)$

2.56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin3x}{x}$

2.57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{sinx}$

2.58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2 4x}{6x^2}$

2.59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2 2x}{3x}$

2.60. Укажите знакоположительный (все члены ряда положительны), степенной (членами ряда являются степенные функции аргумента x), знакочередующийся (члены ряда попеременно положительны и отрицательны) ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{\sqrt{3+4n}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n+5)!}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n-1}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)!}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot n!$

2.61. Какие нижеперечисленные ряды сходятся, какие расходятся:

а) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2\cdot 4}+\frac{1}{6^3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{6^n\cdot n^2}+\ldots$

б) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\ldots+\frac{1}{6^n}+\ldots$

в) $5+5^2\cdot 8+5^3\cdot 27+\ldots+5^n\cdot n^3+\ldots$

г) $5+5^2+5^3+\ldots+5^n+\ldots$

д) $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{2^n+3}+\ldots$

е) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

III уровень

2.62. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)$

2.63. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-5x+6}$

2.64. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{5x^2+4x-1}$

2.65. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3x^2-2x+1}{2x^3+2}$

2.66. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

2.67. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x-1}$

2.68. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-2}}{9-x^2}$

2.69. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{\sqrt{2x+3}-3}$

2.70. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

2.71. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$

2.72. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{5-x}}$

2.73. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{x^2-6x-16}$

2.74. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2-x-1}$

2.75. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2-x-2}$

2.76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3sin2x-sinx}{x}$

2.77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin2x}{sin3x}$

2.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-cos^3x}{x^2}$

2.79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{sin15x}$

2.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+4sinx}{7x-sinx}$

2.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin3x}{5x}$

2.82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

2.83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

2.84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

2.85. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

2.86. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

2.87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$

2.88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{2+x}$

2.89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

2.90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{tg3x}$

2.91. Покажите на рисунке несколько возможных вариантов поведения графика функции $f(x)$ вблизи точки $x=0$, если $\lim_{x\to+0} f(x)=1$ и $\lim_{x\to-0} f(x)=+\infty$ (считать +0 – справа от значения 0, -0 - слева от значения 0)

2.92. Покажите несколько возможных вариантов поведения графика функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

3. Производная функции

Актуальность темы

Понятие производной – одно из основных понятий математического анализа. В настоящее время понятия производной находит большое применение в различных областях науки и техники.

Изучение функции с помощью производной составляет предмет дифференциального исчисления. Быстрота протекания физических, химических, биологических и других процессов, например скорость охлаждения тела, скорость химической реакции и т.п., также выражается при помощи производной.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- вычислять производные функций по определению и таблице производных;
- применять теоремы о производных;
- решать задачи с использованием производных.

Обучающийся должен знать:

- определение производной функции;
- таблицу производных;
- теоремы о дифференцировании суммы, произведения, частного, сложной функции;
- геометрический и физический смысл производной функции.
- области практического применения производной функции.

Ключевые понятия и формулы

Определение производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Таблица производных

$C' = 0; \quad C = const$ **(3.2)**

$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in R$

в частности $x' = 1$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **(3.3)**

$(a^x)' = a^x lna$, в частности $(e^x)' = e^x$ **(3.4)**

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{xlna}$ в частности $(lg\, x)' = \dfrac{1}{xln10}$; $(ln\, x)' = \dfrac{1}{x}$ **(3.5)**

$(sin\, x)' = cosx$ **(3.6)**

$(cos\, x)' = -sinx$ **(3.7)**

$(tg\, x)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$ **(3.8)**

$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{sin^2 x}$ **(3.9)**

$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3.10)**

$(arccosx)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3.11)**

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ **(3.12)**

$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ **(3.13)**

Правила дифференцирования

$(U \pm V)' = U' \pm V'$ **(3.14)**

$(U \cdot V)' = U'V + V'U$ **(3.15)**

$(CU)' = CU'$ C=const **(3.16)**

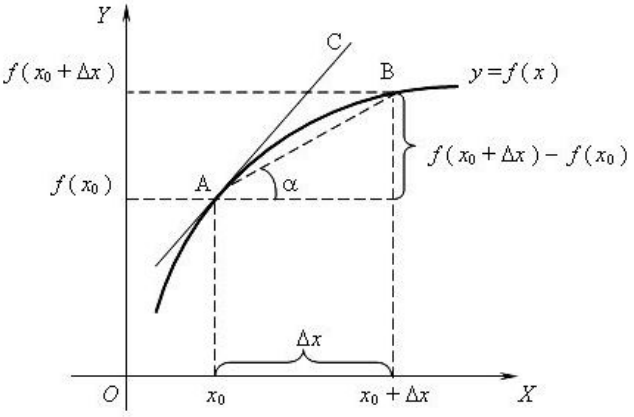
$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - V'U}{V^2}$ **(3.17)**

Если $y = f(g(x))$, то $y' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ **(3.18)**

Физический смысл производной

Производная функции, отображающая физический процесс – есть **скорость протекания этого процесса.**

Геометрический смысл производной



Производная функции в точке x_0 – есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции в точке x_0.

Исследование функции и построение графика

1. **Достаточный признак возрастания (убывания) функции**:
   если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.

   если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.

   Промежутки возрастания и убывания функции называют **промежутками монотонности функции.**
2. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками** (критические точки могут быть точками экстремума).
3. **Необходимое условие экстремума:** если x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная $f'(x)$, то $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.
4. **Точками экстремума** называют ***точки минимума и максимума*** *функции*

   Признак максимума функции: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

   Признак минимума функции: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.
5. **Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.** Функция $f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *ниже* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой ке$(x_0, f(x_0))$,
   $x_0 \in (a, b)$.

Функция $f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *выше* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0,\ f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Для того, чтобы кривая $y = f(x)$ в данной точке была выпуклой, достаточно, чтобы вторая производная в этой точке была отрицательна.

Для того, чтобы кривая $y = f(x)$ в данной точке была вогнута, достаточно, чтобы вторая производная в этой точке была положительна.

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***.

План исследования функции $y = f(x)$ на экстремум:

1) Найдите область определения функции;
2) Найдите производную $f'(x)$;
3) Найдите точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$;
4) Найдите точки в которых $f'(x)$ не существует;
5) Отметьте на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y = f(x)$;
6) Определите знак $f'(x)$ на каждом из промежутков области определения;
7) Сделайте выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек.

План исследования функции с помощью производной и построение графика:

1) Найдите область определения и область значений функции,
2) Установите, является ли функция чётной или нечётной, (найдите $y = f(-x)$. Если $f(-x) = f(x)$, то функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат; если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат).
3) Найдите нули функции и её значения при $x = 0$. (Точки пересечения с осями координат).
4) Исследуйте функцию на монотонность. (Если $f'(x) > 0$, то функция возрастает, если $f'(x) < 0$, то функция убывает).
5) Найдите точки экстремума и значения функции в этих точках.
6) Найдите интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
7) Вычислите дополнительные точки.
8) Постройте график.

Уравнение касательной к графику функции в точке x_0

$$\boldsymbol{y = f'(x_0)x + b} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = 2sinx - \frac{cosx}{3} + 5.$

Решение: Применяем формулы 3.6, 3.7, 3.14, 3.16:

$$f'(x) = \left(2sinx - \frac{cosx}{3} + 5\right)' = (2sinx)' - \frac{1}{3}(cosx)' + 5'$$

$$= 2cosx - \frac{1}{3}(-sinx) == 2cosx + \frac{1}{3}sinx$$

Ответ: $2cosx + \frac{1}{3}sinx$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = x^{\frac{2}{5}}\log_3 x$

Решение: Воспользуемся формулами: 3.3, 3.5, 3.14

$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{5}}\log_3 x\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' \cdot \log_3 x + (\log_3 x)' \cdot x^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} \cdot \log_3 x + \frac{x^{\frac{2}{5}}}{xln3} =$$

$$= \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} \cdot \log_3 x + \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}ln3}$$

Ответ: $\frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} \cdot \log_3 x + \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}ln3}$

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = \frac{2^x}{x^2+1}$

Решение: Воспользуемся формулами: 3.3, 3.4, 3.5, 3.17

$$f'(x) = \left(\frac{2^x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2^x)' \cdot (x^2+1) - (x^2+1)' \cdot 2^x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2^x ln2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2^x}{(x^2+1)^2}$$

Ответ: $\frac{2^x ln2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2^x}{(x^2+1)^2}$

Пример 4. Найти производную функции $f(x) = tg(x^2 + 3x + 1).$

Решение: Воспользуемся формулами: 3.3, 3.8, 3.18

$$f'(x) = (tg(x^2+3x+1))' = \frac{(x^2+3x+1)'}{cos^2(x^2+3x+1)} = \frac{2x+3}{cos^2(x^2+3x+1)}$$

Ответ: $\frac{2x+3}{cos^2(x^2+3x+1)}$

Пример 3. Найти частные производные функции $z = xsiny + y^2$

Решение:

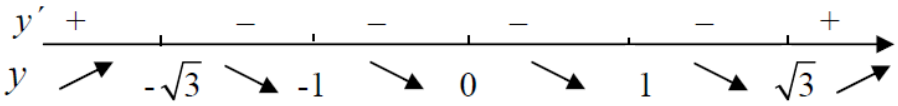
$\frac{\partial z}{\partial x} = (xsiny + y^2)'_x = siny$, ($y$ – постоянная, x– переменная)

$\frac{\partial z}{\partial y} = (xsiny + y^2)'_y = x \cdot cosydy + 2y$ (x – постоянная, y – переменная)

Пример 4. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ методами дифференциального исчисления и построить график.

Решение:

1. Область определения.
   $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Точки разрыва $x = 1$ и $x = -1$
2. Четность.
   Функция нечетная, так как $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -y(x)$
   График симметричен относительно начала координат
3. Нули функции.
   Находим точки пересечения с осями координат:
   с осью Ox:
   $$y = \frac{x^3}{x^2-1} = 0;\ x = 0 \quad \textit{точка}\ (0; 0)$$
   с осью Oy:
   $$x = 0 \Rightarrow y = 0, \qquad \textit{точка}\ (0;\ 0)$$
4. Монотонность.
   Вычисляем первую производную
   $$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} =$$
   $$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$$
   Находим критические точки: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \pm 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



   Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3}), (\sqrt{3}; +\infty)$,

   Функция убывает на интервалах $(-\sqrt{3}; -1), (-1; 0), (0; 1), (1; \sqrt{3})$.

5. Экстремумы.

   Функция имеет минимум при $x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ т.к. знак производной меняется с « + » на « − »

$$y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$$

   Функция имеет максимум при $x = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$ т.к. знак производной меняется с « − » на « + »

$$y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$$

6. Выпуклость и точки перегиба.

   Вычисляем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)2x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4}$$

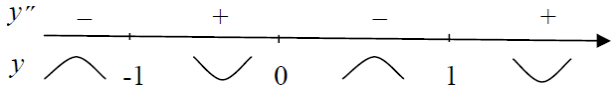
$$= x\frac{(4x^2-6)(x^2-1) - 4(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3}$$

$$= x\frac{4x^4 - 6x^2 - 4x^2 + 6 - 4x^4 + 12x^2}{(x^2-1)^3} = x\frac{(6+x^2)}{(x^2-1)^3}$$

   Приравниваем к нулю и находим критические точки:

   $x\frac{(6+x^2)}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1.$

   Исследуем знак второй производной на интервалах, на которые критические точки делят область определения функции.



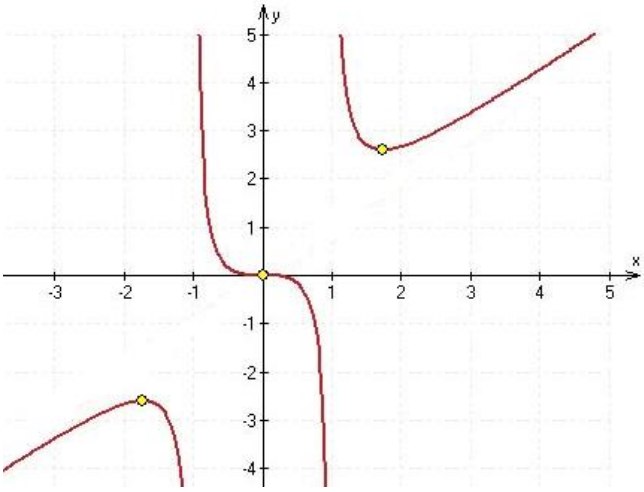
   Функция выпукла на интервалах $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$, вогнута на интервалах $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$. Точка перегиба:

   $x = 0,\ f(0) = 0$.

7. Найдем несколько дополнительных точек:

   $y(-4) \approx -4{,}3;\ y(-3) \approx -3{,}4;\ y(3) \approx 3{,}4;\ y(4) \approx 4{,}3$

8. Строим график функции, отмечая ключевые точки



Проверь себя

1. Установите соответствие между функциями и их производными

1)	$y = x\sqrt{x}$	а)	$2{,}5x\sqrt{x}$
2)	$y = 3ln2x$	б)	$\frac{3}{x}$
3)	$\sqrt{x^5}$	в)	$1{,}5\sqrt{x}$

2. Производная функции $y = cos4x$ равна

1) $sin4x$ 3) $-4sin4x$
2) $-sin4x$ 4) $4cosx$

3. Вторая производная функции $y = 5 + 10x - 3x^4$ имеет вид

1) $y'' = -36x^2$ 3) $y'' = 10 - 36x^2$
2) $y'' = 10 - 12x^3$ 4) $y'' = 15x^2$

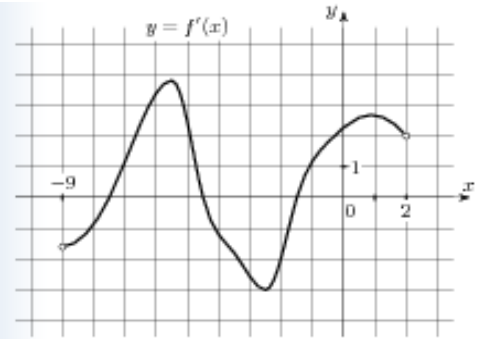
4. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 5x^2 - 2x + 1$ в точке $x_0 = 0$ равен

1) 1; 2) -2; 3) 8; 4) 4

5. Дана функция $y = 2x^4 - 3x^3 - 2$. Значение производной функции в точке $x = 2$ равно

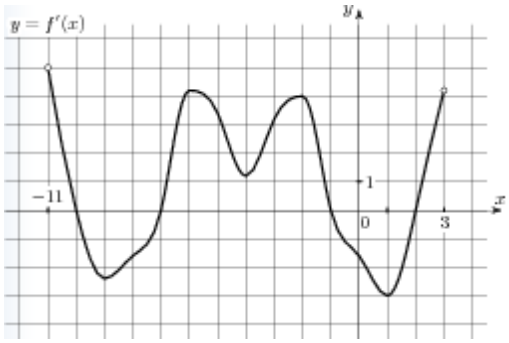
1) 6; 2) 12; 3) 28; 4) 44

6. На рисунке изображен *график производной* функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;\ 2)$. Укажите промежутки убывания функции $f(x)$



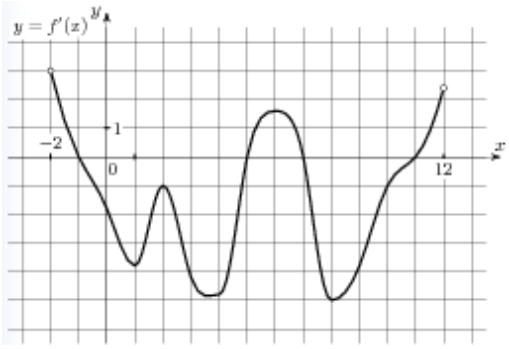
1) $(-9; -7{,}5)$; 2) $(-7{,}5;\ -4{,}5)$; 3) $(-4{,}5; -1{,}5)$; 4) $(-1{,}5; 2)$

7. На рисунке изображен график *производной функции* $f(x)$, определенной на интервале $(-11;\ 3)$. Длина наибольшего промежутка возрастания функции равна



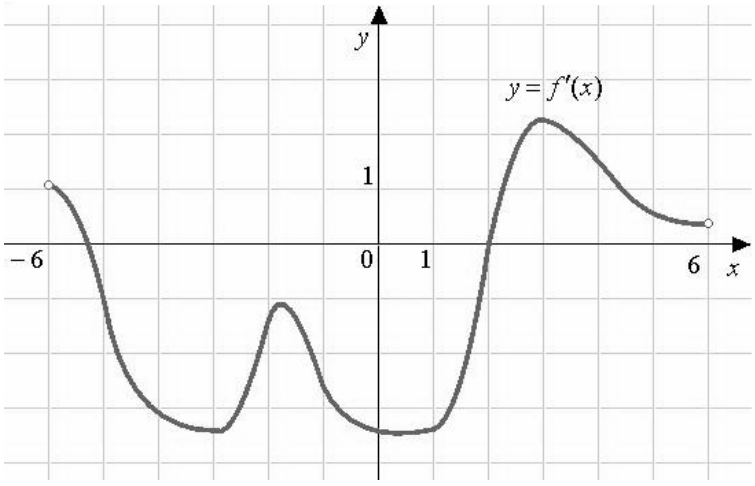
1) 3; 2) 6; 3) 1; 4) 4.

8. На рисунке (см. ниже) изображен график *производной функции* $f(x)$, определенной на интервале $(-2;\ 12)$. Сколько точек минимума имеет функция



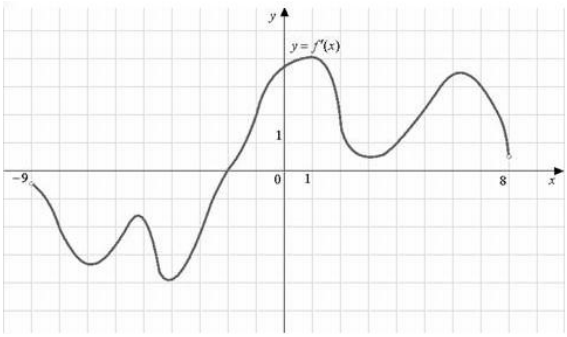
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4

9. На рисунке изображен график *производной функции* $f(x)$, определенной на интервале $(-6;\ 6)$. Укажите количество точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен –3



1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4

10. На рисунке изображен график *производной функции* $f(x)$, определенной на интервале (–9; 8). Точку экстремума функция имеет при x, равном



1) –9; 2) 8; 3) –2; 4) 1

Эталон ответов:

1. 1) – в), 2) – б), 3) – а); **2.** 3); **3.** 1); **4.** 2); **5.** 3); **6.** 1),3); **7.** 2); **8.** 2); **9.** 4); **10.** 3).

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Определение понятий: приращение функции, приращение аргумента, производная функции, производная высшего порядка.
2. Таблица производных.
3. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного, сложной функции.
4. Геометрический смысл производной.
5. Физический смысл производной.
6. Применение производной для решения прикладных задач.
7. Выполните задания:

   1) Решите задачи:

      а) Определить скорость движения точки в конце третьей секунды, если путь в S метров, пройденный точкой за t секунд, выражается функцией $s = 2t^3 - 3$

      б) Когда скорость точки, движущейся по закону $s = t^2 - 4t + 5$ равна нулю?

      в) Найти наклон касательной к кривой $y = x^2 - 4$ в точке с абсциссой, равной 2

      г) Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2 - 2x + 3$ в точке, абсцисса которой равна 1.

   2) Продифференцируйте функции

а) $y = \cos x \cdot \left(x^2 + 3x\right)$ *г*) $y = \dfrac{5}{x^3 + 2x}$

б) $y = 2^x \cdot \left(\dfrac{1}{3}x^3 + 1\right)$ *д*) $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\sqrt{3}$

в) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ *е*) $y = \left(1 - x^4\right)^5$

8. Выпишите общие формулировки заданий на вычисление и применение производных.

9. На каждое правило дифференцирования приведите номера заданий из I уровня. Например, на применение формулы (3.14) №№ 3.2., 3.3., 3.4., 3.5., 3.6., 3.7. ... и т.д.

Ответы:

1. а) 54; б) 2; в) 4; г) 0.

2.

а) $y' = -\sin x(x^2 + 3x) + \cos x(2x + 3)$,

б) $y' = 2^x \ln x\left(\dfrac{1}{3}x^3 + 1\right) + x^2 \cdot 2^x$

в) $y' = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

г) $y' = -\dfrac{15x^2 + 10}{\left(x^3 + 2x\right)^2}$

д) $y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

е) $y' = -20x^3(1 - x^4)^4$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»

9-10 баллов «4»

6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

Найдите производные от функций

3.1. $y = \sqrt{3}$

3.2. $y = x + 3$

3.3. $y = \sqrt[3]{2} - x$

3.4. $y = x^2 + 2$

3.5. $y = \pi x - 0{,}7$

3.6. $y = \frac{x}{5} + 4$

3.7. $y = 0{,}2x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 6x + 8$

3.8. $f(x) = x^2 + \frac{x}{4} + 3$

3.9. $y = cos\varphi + x \cdot tg\varphi;\ \varphi = const$

Вычислите частные значения производных

3.10. $y = 3x^2 + 4x - 1,$ $y'(-0{,}5) = ?, y'(0{,}5) = ?$

3.11. $y = 2x^4 - x^3 + x,$ $y'(1) = ?, y'(-1) = ?$

Найдите производные от произведения и частного функций

3.12. $y = cosx(x^2 + 3x)$

3.13. $y = sinx \cdot tgx$

3.14. $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x}$

3.15. $y = \frac{3x^2 - 3x + 4}{2x - 1}$

Найдите производные от сложных функций

3.16. $y = (x^2 + 2x - 6)^7$

3.17. $y = lnx^2$

3.18. $y = 3^{2x}$

Вычислить частные значения вторых производных от функций

3.19. $y = x^5 - \frac{1}{x}, y''(\sqrt[3]{2})$

3.20. $y = sin^3x, y''\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3.21. $y = ln^2x, y''(1)$

3.22. $y = \sqrt{3x}, y''(3)$

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0

3.23. $y = 3x^2 - x + 5;$ $x_0 = 0$

3.24. $y = 6 - 3x + 2x^2;$ $x_0 = 0$

3.25. $y = 4x^2 - 5x;$ $x_0 = 1$

3.26. $y = x^2 - 3x;$ $x_0 = 4$

3.27. Вычислите тангенс угла наклона касательной к кривой $y = \sqrt{x} + 10$ в точке $x = 1$

3.28. Определите скорость протекания процесса, заданного функцией: $y = t^3 - 2t$ в момент времени $t = 2$

3.29. Определите скорость изменения функции $y = \sqrt{x} + 2x$ при $x = 1$

3.30. Концентрация раствора изменяется с течением времени по закону $C = \frac{100t}{1+5t}$. Найдите скорость растворения вещества.

Вычислите вторые производные функций:

3.31. $y = 5x + 4$

3.32. $y = 3x^2 + 4x - 17$

3.33. $y = \sin x$

3.34. $y = \sin 4x$

3.35. $f(x) = 6x^5 + 8x^4 - 3x + 5 - 7^x$

3.36. $f(x) = (3x^2 - 2) \cdot (1 - x + 4x^2)$

3.37. $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (1 - 4x + 3x^2)$

Вычислите производные функций:

3.38. $f(x) = 3x^6 - 9x^5 - 7x + 2$

3.39. $f(x) = 6\log_2 x$

3.40. $f(x) = 8\sqrt{x} + 5^x$

3.41. $f(x) = -6\lg x + \ln x$

3.42. $f(x) = 5^x + \log_2 x$

3.43. $f(x) = x^3 \cos x$

3.44. $f(x) = \sin x \cdot (3x^7 - 6)$

3.45. $f(x) = \log_3 x \cdot e^x$

3.46. $f(x) = \dfrac{5x+2}{1-4x}$

3.47. $f(x) = \dfrac{3-5x^3}{1+x^2}$

3.48. $f(x) = \dfrac{x^3+x}{1-x}$

3.49. $f(x) = 12^x - 4\sqrt{x}$

3.50. $f(x) = \dfrac{cosx-3}{sinx}$

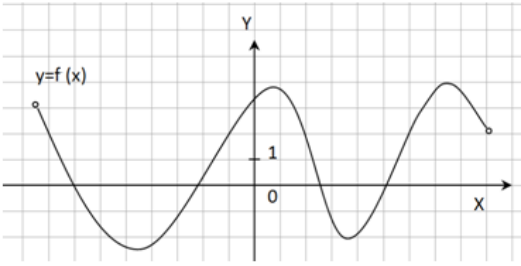
3.51. $f(x) = x^4 sinx$

3.52. $f(x) = \dfrac{sinx}{cosx-1}$

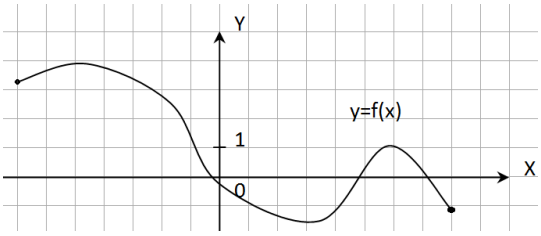
3.53. $f(x) = \dfrac{cosx+2}{cosx-2}$

3.54. $f(x) = \dfrac{cosx}{1+sinx}$

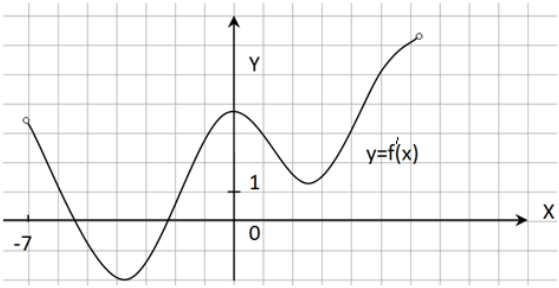
3.55. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8{,}5;\ 9)$. Укажите целые точки, в которых производная функции положительна.



3.56. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале [-7; 8]. Укажите целые точки, в которых производная функции отрицательна



3.57. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (-7; 6,2). Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



II уровень

3.58. Найдите ошибки в вычислениях производных, укажите правильный ответ:

1) $f'(x) = \left(6x^{\frac{2}{3}}\right)' = 6 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 4x^{\frac{1}{3}}$

2) $f^{'}(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^{'} = \frac{1}{3x^{3-1}} = \frac{1}{3x^2}$

3) $f^{'(x)} = \left((x+1)e^x\right)^{'} = (x+1)^{'} \cdot (e^x)^{'}$

4) $f'(x) = \left(\frac{sin\ x+2}{sinx\ -1}\right)' = \frac{(sinx\ -1)'(sin\ x+2)-(sinx\ -1)(sin\ x+2)'}{(sinx\ -1)^2}$

5) $f'(x) = \left(\frac{cos\ x+1}{cosx\ -1}\right)' = \frac{(cosx\ +1)'}{(cosx\ -1)}$

6) $f'(x) = (xlnx)' = x'(lnx)'$

7) $f^{'}(x) = (\sin(3x^2-1))^{'} = (3x^2-1)^{'} \cdot cosx$

8) $f^{'}(x) = (\sin 5x)^{'} = (5x)'(-\cos 5x)$

3.59. Вычислите приращение функции $y = x^3$, если значение аргумента изменилось от 3 до 4.

3.60. Известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, вычисляется по формуле $S = \frac{gt^2}{2}$, где S- путь в метрах, g – ускорение силы тяжести ($g \approx 9{,}8$ м/с), t – время, с. Найдите

а) скорость v тела в момент $t = 2$

б) среднюю скорость тела за промежуток времени от t_1=2 до t_2=5

3.61. Зависимость температуры T тела от времени t задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10\ c$?

3.62. Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $S = t^3 + t^2 - 27t$, другое по закону $S = t^2 + 1$. Определить момент времени, когда скорости этих тел окажутся равными.

3.63. В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $S = 3t^2 - 12t + 2$, равна 0? Найдите ускорение тела.

3.64. Движение двух материальных точек задано уравнениями: $S_1 = 4t + 8t^2 - 16t^3$ $S_2 = 4t + 3t^2 + \frac{2}{3}t^3$. Найдите, в какой момент времени ускорение одинаково.

3.65. Маховик вращается по закону $\varphi = 8t^2 - 6t + 4$. Найдите угловую скорость в момент времени $t = 3c$.

Вычислите производные функций:

3.66. $f(x) = 4^x - 5\sqrt{x} + 2\,log_3\,x + 2e^x$

3.67. $f(x) = 6\sqrt{x} + 3^x + e^x - lg\,x$

3.68. $f(x) = x^2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x}$

3.69. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

3.70. $f(x) = 2 - 3x^4 + \frac{4}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}$

3.71. $f(x) = a^{sinx}$

3.72. $f(x) = \sqrt{x^5}lnx$

3.73. $f(x) = \sqrt[8]{x^3}cosx$

3.74. $f(x) = x^{10}\,log_2\,x$

3.75. $f(x) = \frac{2tgx}{ctgx}$

3.76. $f(x) = \frac{xlnx}{x-1}$

3.77. $f(x) = \frac{x+e^x}{x-e^x}$

3.78. $f(x) = sin(6x-1)$

3.79. $f(x) = \frac{sinx+2}{cosx}$

3.80. $f(x) = x^3tgx$

3.81. $f(x) = sin(8x^6-5)$

3.82. $f(x) = sin^3x$

3.83. $f(x) = 2cos^5x$

3.84. $f(x) = tg^3x$

3.85. $f(x) = (x^2+3x-10)^5$

3.86. $f(x) = \left(x^5 - 3x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

3.87. $f(x) = \left(\frac{1}{2x+3}\right)^4$

3.88. $f(x) = (4x+1)^{-5}$

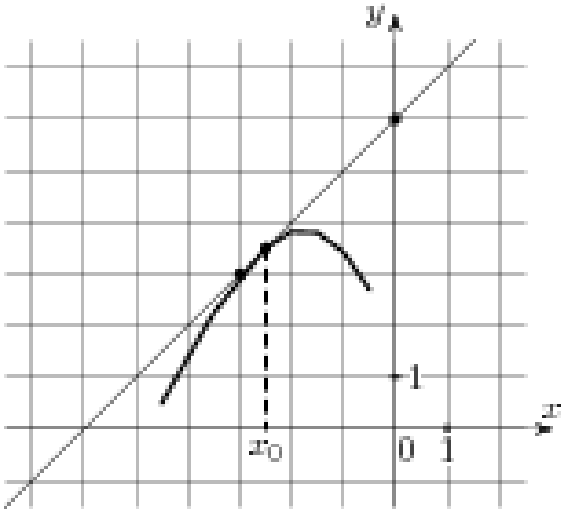
3.89. $f(x) = (x^3+3x)^6$

3.90. $f(x) = \frac{1}{(3x^2-5)^6}$

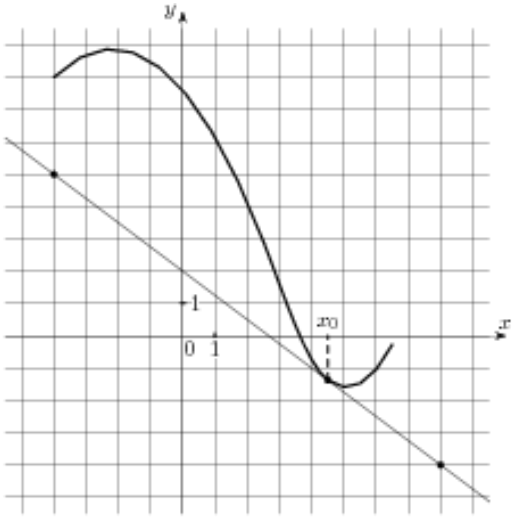
3.91. $f(x) = x^2ln(1-2x)$

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции.

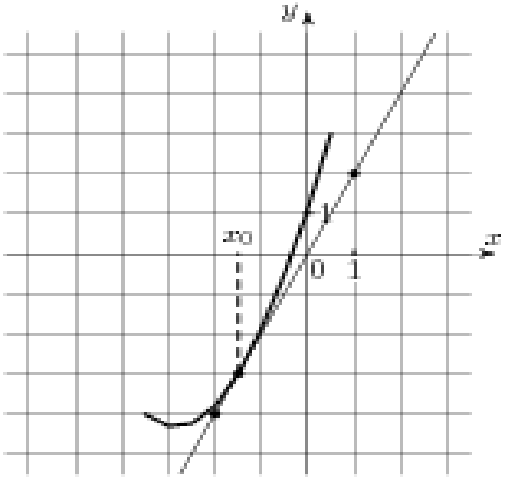
3.92.



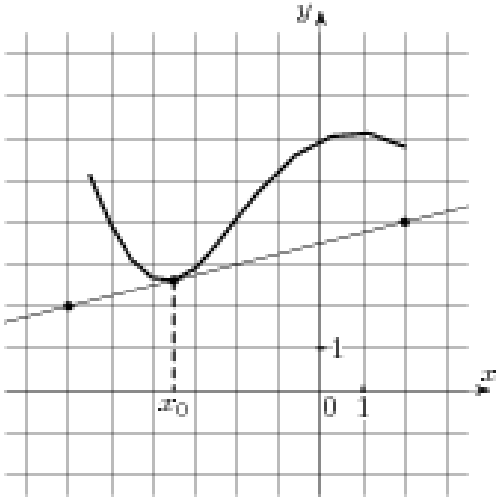
3.93.



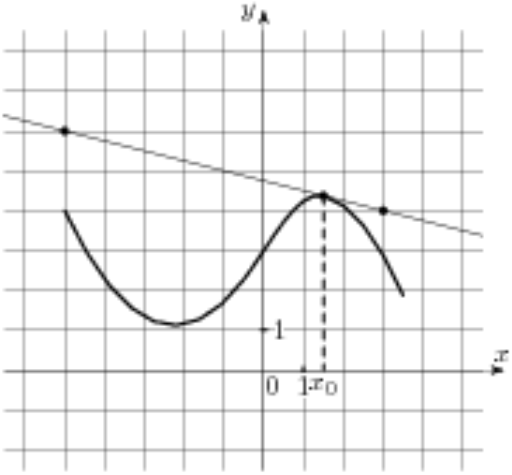
3.94.



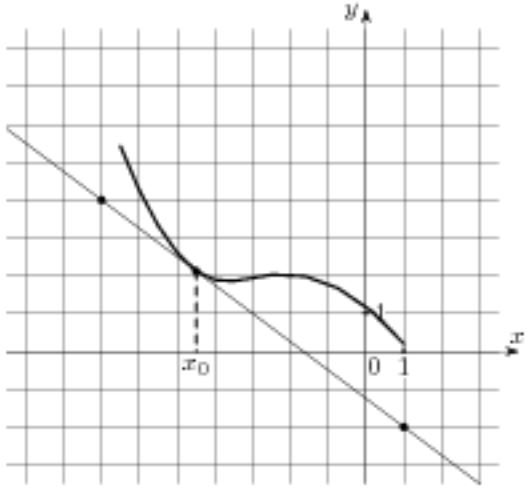
3.95.



3.96.



3.97.



Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке [a,b].

3.98. $f(x) = x^3 - 12x + 7, a = 0, b = 3$

3.99. $f(x) = x^3 - 12x + 7, a = -3, b = 8$

3.100. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ на отрезке [0,5; 2]

3.101. $f(x) = \frac{x+3}{x-1}, a = -2,\ b = 3$

Определить, возрастает или убывает данная функция в указанных точках.

3.102. $y = x^2;\ x = -3,\ x = -1,\ x = 4$

3.103. $y = x^3 - x^2;\ x = -1,\ x = 3,\ x = 5$

3.104. $y = \frac{1-x^2}{1+x^2};\ x = -5,\ x = 2,\ x = 7$

3.105. $z = \frac{3+u^2}{u};\ u = -2,\ u = -1,\ u = 0,\ u = 2$

Найдите экстремумы функции, промежутки возрастания, убывания функций.

3.106. $y = 3x^2 + 5$

3.107. $y = 1 - 7x^2$

3.108. $y = 2x^2 - 8x$

3.109. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x$

3.110. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 12$

3.111. $y = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x$

3.112. $y = (x-2)e^x$

III уровень

Вычислите производные функций по определению в точке x_0:

3.113. $f(x) = 2x^2 + 1$

3.114. $f(x) = 1 - x^3$

3.115. $f(x) = 2x^2 - 7x$

Продифференцируйте функции:

3.116. $f(x) = lg(4x^2 + 2x - 5)$

3.117. $f(x) = x \cdot 2^{3x+x^2}$

3.118. $f(x) = cosln5x$

3.119. $f(x) = lncos5x$

3.120. $f(x) = sin^2(cos^3x)$

3.121. $f(x) = cos^3 7x - tg5x$

3.122. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(4x+1)^4}$

3.123. $f(x) = \dfrac{2^{3x+4}}{(3x-5)^6}$

3.124. $f(x) = lnsin(2x+5)$

3.125. $f(x) = cos^7 5x \cdot sin2^x$

3.126. $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{x^2+3x}\right)^3$

3.127. $f(x) = arcsin(6x-1) - tg3x^3$

3.128. $f(x) = tg^3x + tg(5x-2)$

3.129. $f(x) = tgx \cdot sin^2x$

3.130. $f(x) = cos^3x - tg(4x^2)$

3.131. $f(x) = 5^{ln5x+tgx}$

3.132. $f(x) = e^{sinx} \cdot log_3(1-x)$

3.133. $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x^2 - 7}$

3.134. $f(x) = log_3(x^2 - sinx)$

3.135. $f(x) = lncos5x - arcsin\sqrt{x}$

3.136. $f(x) = sine^{8x} + 2lntg3x$

Составьте уравнение касательной к графику функции в заданной точке x_0

3.137. $y = 2x^5 - 5x^2$, $x_0 = 1$

3.138. $y = \frac{3x}{x^2-4}$, $x_0 = 0$

3.139. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x_0 = -1$

3.140. $y = \frac{5x}{x+1}$, $x_0 = -2$

3.141. $y = \frac{x^2-3x+3}{3}$, $x_0 = 3$

3.142. $y = \frac{x^2}{10} + 3$, $x_0 = 2$

Решите задачи.

3.143. Зависимость между количеством x вещества, полученного в некоторой химической реакции, и временем t, выражается уравнением: $x = A(1 + e^{-kt})$, где A и k — постоянные. Определить скорость реакции.

3.144. Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению: $C = C_0 e^{-kt}$, где c – количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся к времени растворения t; C_0 – исходное количество лекарственного вещества в таблетке; k – постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

3.145. Рост числа бактерий подчиняется закону: $f(t) = \frac{1000e^t}{1+0{,}1(e^t-1)}$. Определить скорость роста числа бактерий.

3.146. Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением: $y = te^{-\frac{t^2}{2}}$, $t > 0$. Определить скорость и ускорение в зависимости от времени.

Исследуйте функции, постройте графики

3.147. $y = 3x^2 - x^3$

3.148. $y = (x - 3)\sqrt{x}$

3.149. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3.150. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

3.151. $y = \frac{5x}{x+1}$

3.152. $y = \frac{2}{x^2+2x}$

3.153. $y = \frac{3x-3}{x^3}$

3.154. $y = \frac{x}{x^2-1}$

3.155. $y = \frac{x^2}{x-2}$

3.156. $y = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$)

3.157. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

3.158. $f(x) = 2x^2 - x^4$

4. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях

Актуальность темы

Таким же важным, как и понятие производной в математическом анализе, является и понятие дифференциала функции. В приложениях математики к решению конкретных задач приходится иметь дело с величинами, числовые значения которых получены путем измерений и, следовательно, точное их значение неизвестно. Если исходные данные содержат погрешности измерений, то применение точных методов вычислений нецелесообразно. Для упрощения и облегчения вычислений в таких случаях лучше использовать приближенные методы.

Теоретической основой одного из простейших приёмов приближенных вычислений является понятие дифференциала.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- находить дифференциал функции;
- применять формулу приближенных вычислений значения функции;
- находить частные и полный дифференциалы функции многих переменных

Обучающийся должен знать:

- понятие дифференциала функции;
- понятие полного и частного дифференциала;
- формулу приближенных вычислений значений функции в точке с помощью дифференциала.

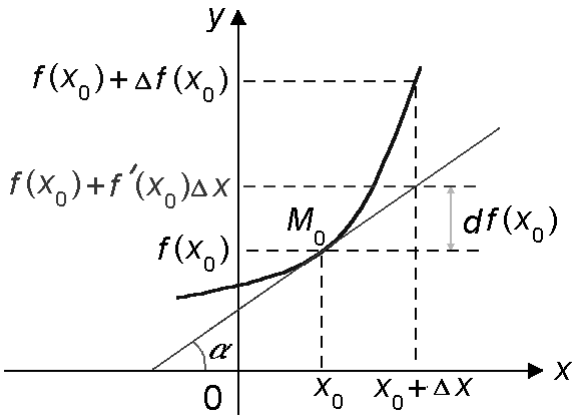
Ключевые понятия и формулы

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение аргумента. Обозначается dy.

$\boldsymbol{dy = y'\Delta x = y'dx}$ – дифференциал функции $y = f(x)$ по переменной x **(4.1)**

$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy \approx \Delta y}$ **(4.2)**

Геометрическая интерпретация дифференциала функции



Частный дифференциал по переменной *x* **функции** $u = f(x;\ y; z)$ вычисляется так же, как производная функции одной переменной *x* в предположении, что *y* и *z* – постоянные величины.

Обозначения частного дифференциала по *x*: $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, или $\frac{\partial f}{\partial x}dx$

$\boldsymbol{d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx}$ – частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной x, **(4.3)**

$\boldsymbol{d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy}$ - частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной y, **(4.4)**

$\boldsymbol{d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz}$ - частный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ по переменной z. **(4.5)**

$\boldsymbol{du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz}$ – полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ **(4.6)**

Пример 1.

Вычислите приближенно приращение функции $y = \frac{x+1}{x^2}$, если аргумент изменился с $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}028$

Решение: приращение функции приближенно равно дифференциалу функции:

$$\Delta f(x) \approx dy = y'\Delta x = \left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)' = \frac{(x^2+1)'x^3 - (x^2+1)(x^3)'}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{2x \cdot x^3 - 3x^2(x^2+1)}{x^6}\Delta x = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6}\Delta x$$

$$= \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6}\Delta x = \frac{x^2(-x^2-3)}{x^6}\Delta x = \frac{-x^2-3}{x^4}\Delta x$$

Вычислим значение дифференциала при $x_1 = 1$ и $\Delta x = 1{,}003 - 1 = 0{,}003$

$$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx dy|_{\substack{x_1=1 \\ \Delta x=0{,}003}} = \frac{-1^2-3}{1^4} \cdot 0{,}028 = -4 \cdot 0{,}028 = -0{,}112$$

Ответ: $\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx -0{,}112$, т.е. значение функции уменьшилось на 0,112 при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}028$.

Пример 2.

Вычислите полный дифференциал функции $u = x^2 \cdot lny$.

Решение:

Полный дифференциал записывается в виде $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. Найдем частные дифференциалы:

Дифференциал функции u по переменной x: т.е. y принимается за постоянную величину, а, следовательно, и lny – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = (x^2 \cdot lny)'_x dx = lny \cdot (x^2)'_x dx = 2x\ lny\ dx$$

Дифференциал функции u по переменной y: т.е. x принимается за постоянную величину, а, следовательно, и x^2 – постоянная величина.

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy = (x^2 \cdot lny)'_y\ dy = x^2 (lny)'_y\ dy = x^2 \cdot \frac{1}{x} dy = x\ dy$$

Тогда полный дифференциал $du = 2x\ lny\ dx + x\ dy$

Ответ: $du = 2x\ lny\ dx + x\ dy$

Приложение дифференциала функции
к приближенным вычислениям значения функции

Формула приближенного вычисления значения функции

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) \cdot \Delta \boldsymbol{x} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Алгоритм приближенного вычисления значения функции в точке x:

1. Представить x в виде суммы x_0 и Δx, $x = x_0 + \Delta x$, x_0 – должно быть как можно ближе к заданному значению x и значение функции в точке x_0 вычисляется точно.
2. Вычислить $f(x_0)$
3. Найти производную заданной функции в точке x_0.
4. Полученные значения подставить в формулу приближенных вычислений.

Из основной формулы приближенных вычислений выводятся следующие формулы:

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \Delta x \qquad \textbf{(4.8)}$$

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0} \Delta x \quad \text{при } x \neq 0 \qquad \textbf{(4.9)}$$

$$(1+\Delta x)^k \approx 1 + k\Delta x, \qquad k \in Z \qquad \textbf{(4.10)}$$

$$(x_0+\Delta x)^k \approx {x_0}^k + k{x_0}^{k-1}\Delta x \qquad \textbf{(4.11)}$$

Пример 3.

Вычислите приближенно значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$

Решение: воспользуемся алгоритмом приближенного вычисления значения функции:

1) представим x в виде суммы $x = x_0 + \Delta x$, т.е. $x = 2{,}025 = 2 + 0{,}025$, где $x_0 = 2, \Delta x = 0{,}025$;
2) вычислим $f(x_0) = f(2) = 2 \cdot 2^5 - 2^3 - 1 = 64 - 8 - 1 = 55$
3) найдем производную заданной функции: $y' = (2x^5 - x^3 - 1)' = 10x^4 - 3x^2$ и вычислим ее значение в точке $x_0 = 2$: $y'(2) = 10 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 = 160 - 12 = 148$
4) подставим значения в формулу приближенных вычислений 4.7.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(2{,}025) = f(2 + 0{,}025) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}025 = 55 + 148 \cdot 0{,}025 = 55 + 3{,}7 = 58{,}7$$

Ответ: значение функции $y = 2x^5 - x^3 - 1$ при $x = 2{,}025$ приближенно равно 58,7

Под **абсолютной погрешностью** измерения понимают разность между полученным в ходе измерения и истинным значением физической величины:

$$\Delta = |\boldsymbol{x_{изм.}} - \boldsymbol{x_{ист.}}| \qquad \textbf{(4.12)}$$

Относительная погрешность представляет собой отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\Delta}{\boldsymbol{x_{ист.}}}\mathbf{100\%} \qquad \textbf{(4.13)}$$

Результат измерения величины принято записывать в виде:

$$\boldsymbol{x_{изм.}} \pm \Delta, \qquad \boldsymbol{\delta} = \cdots\%.$$

При записи абсолютной погрешности ее величину округляют до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях. При записи измеренного значения величины последней должна указываться цифра того десятичного разряда, который использован при указании погрешности.

Пример 4. В отделении стационара 183 пациента. Рассчитайте абсолютную и относительную погрешности, если округлить это число до 180.

Решение:

Абсолютная погрешность: $\Delta = 183 - 180 = 3$.

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{x_{ист}} 100\% = \frac{3}{183} \cdot 100\% \approx 1{,}6\%$$

Ответ: $\Delta = 3$, $\delta \approx 1{,}6\%$

Проверь себя

1. Выберите верные утверждения:
   1) дифференциал аргумента и приращение аргумента равны,
   2) дифференциал аргумента и приращение аргумента приближенно равны,
   3) дифференциал функции и приращение функции равны,
   4) дифференциал функции и приращение функции приближенно равны.

2. Задана функция $y = x^2$ и начальное значение аргумента $x_0 = 3$. Аргументу задано приращение $\Delta x = 0{,}005$. Выберите действия и установите их последовательность при вычислении приближенного приращения функции:
   1. $y(3) = 3^2 = 9$
   2. $y' = 2x$
   3. $\Delta y \approx dy = 6 \cdot 0{,}005 = 0{,}03$
   4. $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

3. Установите соответствие между функцией и записью вычисления ее значения в точке 1,996

1)	$y = x^3$	а)	$\frac{1}{1{,}996^3}$
2)	$y = x^{\frac{1}{3}}$	б)	$1{,}996^3$
3)	$y = x^{-3}$	в)	$\sqrt[3]{1{,}996}$

4. Необходимо вычислить при помощи дифференциала приближенное значение функции $y = x^3 + 2x$ при $x = 4{,}025$. Следуя формуле (4.7) заполните пропуски и вычислите приближенно значение функции:
   1. $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025$, $x_0 =$ ☐ $\Delta x =$ ☐
   2. $y(x_0) =$ ☐
   3. $y' = (x^3 + 2x)' =$ ☐

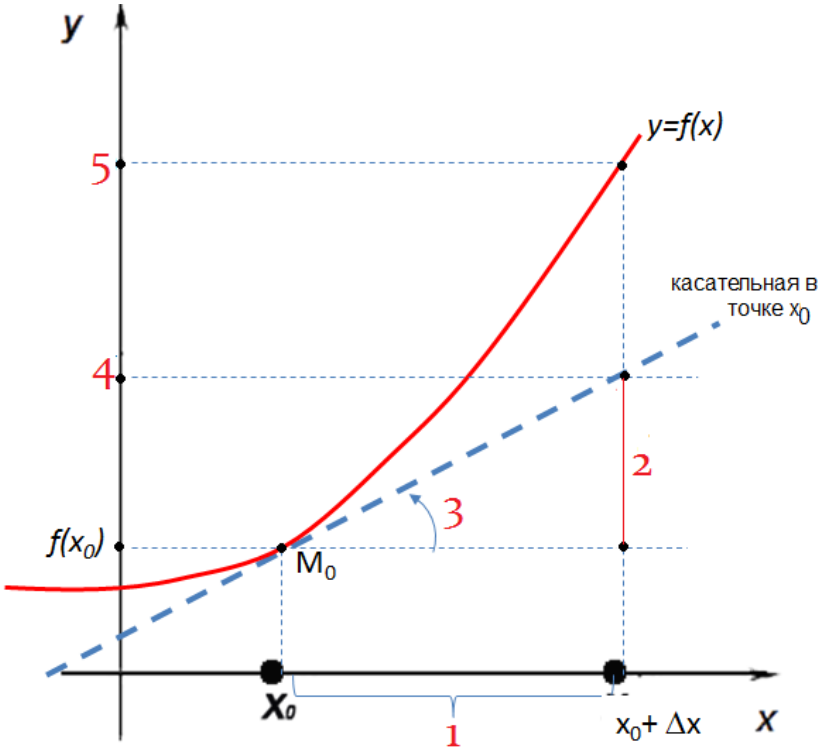
4. $y'(x_0) =$ ☐

5. $y(4{,}025) \approx$ ☐ + ☐ · ☐ = ☐

5. Частный дифференциал $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции $u = x^6 y + 2x$ имеет вид:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 + 2)dx$
2. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 y + 2)dx$
3. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (x^6 + 2x)dx$
4. $\frac{\partial u}{\partial x} dx = (6x^5 + 2)dx$

6. Установите соответствие



Номер объекта на рисунке	Математическое обозначение
1	1. $f(x_0 + \Delta x)$
2	2. Угол наклона касательной
3	3. $f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$
4	4. Δx
5	5. dy

7. Если число 25,36 округлить до целых с избытком, то абсолютная погрешность будет равна… (запишите ответ)

8. Если число 25,36 округлить до целых с недостатком, то абсолютная погрешность будет равна… (запишите ответ)

9. Для вычисления значения функции $y = x^3$ в точке $x = 2{,}05$ за x_0 примем … (поставьте значение)

10.Для вычисления значения $\sqrt[3]{7{,}98}$ за x_0 примем … (поставьте значение)

Эталон ответов:

1. 1,4
2. 2,4,3
3. 1-б, 2-в, 3-а
4.

   1) $x = 4{,}025 = 4 + 0{,}025,$ $x_0 =$ $\boxed{4}$ $\Delta x =$ $\boxed{0{,}025}$

   2) $y(x_0) =$ $\boxed{4^3 + 8 = 72}$

   3) $y' = (x^3 + 2x)' =$ $\boxed{3x^2 + 2}$

   4) $y'(x_0) =$ $\boxed{3 \cdot 4^2 + 2 = 50}$

   5) $y(4{,}025) \approx$ $\boxed{72}$ + $\boxed{50}$ · $\boxed{0{,}025}$ = $\boxed{73{,}25}$
5. 2.
6. 1-4, 2-5, 3-2, 4-3, 5-1
7. 0,64
8. 0,36
9. 2
10. 8

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Понятия приращение функции, приращение аргумента.
2. Определение дифференциала функции.
3. Формула приближенных вычислений значения функции.
4. Выполните задания:
   1) Вычислите приращение функции y=f(x), если задано начальное значение x_0 и аргумент изменился на Δx.

      а). $y = \dfrac{x\sqrt{x} - 5x^3 + x}{x}, \quad x_0 = 1, \ \Delta x = 0{,}02$

      б). $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}, \quad x_0 = 2, \ \Delta x = 0{,}009$

      в). $y = x^3 \cdot (1 - \cos x), \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}, \Delta x = 0{,}04$

      Ответы:

      а) $\Delta y \approx -0{,}019$; б) $\Delta y \approx 0{,}022$; в) $\Delta y \approx 0{,}24\pi^2$

Вычислите приближенно значение функции:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, при 1,06 *Ответ*: $f(1{,}06) \approx 1{,}03$

2) $f(x) = x^7 + 5x^4 + x^3 - 3x + 1$, при $x = 1{,}002$
Ответ: $f(1{,}002) \approx 5{,}054$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x = -7{,}75$ *Ответ:* $f(-7{,}75) \approx 5{,}054$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»
9-10 баллов «4»
6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

4.1. Насколько изменится значение функции $y = 1 - x + x^2$ при изменении аргумента от 4 до 4,002?

4.2. Насколько изменится значение функции $y = x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ при изменении аргумента от 3 до 3,001?

4.3. Дана функция $y = x^4 + x^3 - 2x$, найти y (1,004).

4.4. Дана функция $y = x^3 + x^2 - x$, найти y (0,998).

4.5. Используя общую формулу приближенных вычислений, вывести формулы для функций:

1) $ctg(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

2) $arctg(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

3) $ln(x_0 + \Delta x) \approx \cdots$

4.6. Найдите приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2, \Delta x = 0{,}001$. Какую погрешность допустим, если вычислим дифференциал вместо приращения?

4.7. Какова абсолютная погрешность округления:

а) с недостатком числа 8,3 до ближайшего целого числа;
б) с недостатком числа 9,6 до ближайшего целого числа;
в) с избытком числа 2,8 до ближайшего целого числа;
г) с избытком числа 7,1 до ближайшего целого числа.
д) с избытком числа 2,3 до ближайшего целого числа

4.8. С помощью формулы относительной погрешности выясните какое из двух измерений более точное: $(6{,}00 \pm 0{,}01)$м или $(345{,}0 \pm 0{,}5)$м

4.9. Расстояние между городами, измеренное по карте, равно (24,6±0,2) см. Определить фактическое расстояние между ними и определить абсолютную погрешность, если масштаб карты 1:2 500 000

4.10. Вычислите абсолютную и относительную погрешности, возникающие при замене приближенного числа $\pi \approx 3{,}1416$ более грубым приближением $\pi \approx 3{,}14$

Вычислите приближенное значение приращения функции с помощью дифференциала:

4.11. $y = 2x^2 - 5x - 3$ в точке $x_0 = 3$ при $\Delta x = 0{,}02$

4.12. $y = -x^3 + 4x + 1$ в точке $x_0 = 4$ при $\Delta x = 0{,}005$

4.13. $y = 3x^2 + 7x - 2$ в точке $x_0 = 8$ при $\Delta x = 0{,}03$

4.14. $y = \frac{1}{x^3} + 5$ в точке $x_0 = -2$ при $\Delta x = 0{,}016$

4.15. $y = 2x^2 - 6x + 3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ к значению $x_2 = 1{,}001$.

4.16. $y = -5x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к значению $x_2 = 2{,}003$

Результат вычислений найден с помощью калькулятора. Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений, определите абсолютную погрешность вычислений:

4.17. $\sqrt{0{,}991} \approx 0{,}99489$

4.18. $\sqrt{1{,}008 \approx} 1{,}00399$

4.19. $1{,}0004^{50} \approx 1{,}0202$

4.20. $\sqrt{0{,}994} \approx 0{,}996996$

4.21. $1{,}0003^{20} \approx 1{,}00602$

II уровень

Найдите дифференциал функции:

4.22. $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{x^5}$

4.23. $y = 5lnx + log_7 2x$

4.24. $y = 2^x + \sqrt[3]{x}$

4.25. $y = tgx^3 - 5sin2x$

4.26. $y = sin\,3x \cdot cos4x$

4.27. $y = cos(x^3)$

4.28. $y = (cosx)^3$

4.29. $y = sin^2 3x$

4.30. Вычислите дифференциал функции $y = \frac{sinx}{x+2}$ при заданном значении $x_0 = 0$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}002$:

4.31. Вычислите дифференциал функции $y = \frac{3x^2-2x-4}{2x}$ при заданном значении $x_0 = -1$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}04$

4.32. Вычислите дифференциал функции $y = x^2 cosx$ при заданном значении $x_0 = \pi$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}01$

4.33. Вычислите дифференциал функции $y = (5x-1)^4$ при заданном значении $x_0 = 1$, и приращении аргумента $\Delta x = 0{,}02$

Вычислите приближенно значение функции:

4.34. $y = \sqrt{x+1}$ *при* $x = 2{,}98$

4.35. $y = \frac{1}{x^2+1}$ при $x = 1{,}997$

4.36. $y = \frac{2x^3-4}{4x+2}$ при $x = 1{,}02$

Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений:

4.37. $\sqrt{24{,}5}$

4.38. $\sqrt[4]{86}$

4.39. $\sqrt[3]{126}$

4.40. $\sqrt[5]{32{,}26}$

4.41. $(2{,}989)^{50}$

4.42. $\sqrt[4]{82{,}5}$

4.43. $\sqrt{26}$

4.44. $\sqrt{15{,}84}$

III уровень

Вычислите приближенно значение функции:

4.45. $\sqrt[5]{x+1}$ при x = 30,68

4.46. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ при x = 1,004

4.47. $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ при x = 3,005

Найдите значения выражений с помощью формул приближенных вычислений:

4.48. $\frac{1}{0{,}998^{10}}$

4.49. $sin31°$

4.50. $tg32°$

4.51. $cos61°$

4.52. $tg43°$

4.53. $ln1{,}07$

4.54. $ctg43°$

4.55. $tg46°$

Найдите частные производные и полный дифференциал функции:

4.56. $u = 2xy + 3y^2x^3$

4.57. $u = x^2 + 5y$

4.58. $u = 4\sin(5x^2 - y)$

4.59. $u = ye^x$

4.60. $u = e^{xy}$

4.61. $u = x^2 + xy + z^2$

4.62. $u = \frac{x + y^2}{z}$

4.63. Рост числа клеток популяции описывается уравнением: $N = \frac{5N_0}{(5-N_0)e^{-kt}+N_0}$. Получите формулу для скорости роста численности популяции.

4.64. Укорочение мышцы при одиночном раздражении можно описать уравнением Релея: $y = bte^{-\frac{kt^2}{2}}$, где t – время, b и k – положительные постоянные величины. Найдите моменты времени, при которых скорость укорочения мышцы будет равна 0. Чему будет равно ускорение?

5. Неопределенный интеграл, методы интегрирования.

Актуальность темы

Неопределенный интеграл – одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, зная функцию скорости этой точки).

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- находить первообразные функции, неопределенный интеграл;
- применять метод непосредственного интегрирования и замены переменной.

Обучающийся должен знать:

- определение понятия первообразной, неопределенного интеграла;
- свойства неопределенного интеграла;
- таблицу интегралов;
- методы интегрирования;
- область применения неопределенного интеграла.

Ключевые понятия и формулы

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если выполняется равенство $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Множество всех первообразных функции *f(x)* на некотором промежутке называется ***неопределенным интегралом от функции f(x)*** и обозначается:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C} \qquad \textbf{(5.1)}$$

Свойства неопределенного интеграла:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \textbf{(5.2)}$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \qquad \textbf{(5.3)}$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx\,, k = const \quad \textbf{(5.4)}$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad \textbf{(5.5)}$$

Основные табличные интегралы

$$\int 0dx = C, \qquad C = const \quad \textbf{(5.6)}$$

$$\int dx = x + C \quad \textbf{(5.7)}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad \textbf{(5.8)}$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C \quad \textbf{(5.9)}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C, a > 0, a \neq 1 \quad \textbf{(5.10)}$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C \quad \textbf{(5.11)}$$

$$\int cosx\, dx = sinx\, dx \quad \textbf{(5.12)}$$

$$\int sinx\, dx = -cosx\, dx \quad \textbf{(5.13)}$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C \quad \textbf{(5.14)}$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C \quad \textbf{(5.15)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \quad \textbf{(5.16)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arsin \frac{x}{|a|} + C \quad \textbf{(5.17)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{x - a}{x + a} + C \quad \textbf{(5.18)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{a + x}{a - x} + C \quad \textbf{(5.19)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C \quad \textbf{(5.20)}$$

Методы интегрирования

I. ***<u>Непосредственное интегрирование</u>*** – способ интегрирования путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интегралов, приводящих к одному или нескольким табличным интегралам.

При сведении данного интеграла к табличному часто используется ***метод «подведения под знак дифференциала»***

<u>Пример 1:</u>

$$\int\left(5e^x+2\sqrt{x}-\frac{6}{9-x^2}\right)dx=5\int e^x dx+2\int x^{\frac{1}{2}}dx-6\int\frac{dx}{3^2-x^2}$$

$$==5e^x+2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-6\cdot\frac{1}{2\cdot 3}ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|=$$

$$=5e^x+\frac{4}{3}x\sqrt{x}-ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C$$

<u>Пример 2:</u>

$$\int\frac{dx}{8x-5}=\int\frac{\frac{1}{8}d(8x-5)}{8x-5}=\frac{1}{8}ln|8x-5|+C,\qquad C\in R$$

<u>Пояснение</u>: $d(8x-5)=(8x-5)'\cdot dx=8\cdot dx$, откуда $dx=\frac{1}{8}d(8x-5)$, подставляем вместо *dx* получившееся выражение, выносим за знак интеграла $\frac{1}{8}$ и получаем табличный интеграл вида $\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C$

<u>Пример 3:</u>

$$\int\frac{2x}{2x+3}dx=\int\frac{2x+3-3}{2x+3}dx=\int\left(\frac{2x+3}{2x+3}-\frac{3}{2x+3}\right)dx=\int\left(1-\frac{3}{2x+3}\right)dx=$$

$$=\int dx-3\int\frac{dx}{2x+3}=x-3\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$$

<u>Пояснение</u>: представим дробь в виде суммы дробей, воспользуемся свойствами интеграла (интеграл суммы равен сумме интегралов, постоянный множитель выносим за знак интеграла) и результатом из примера 1.

II. ***<u>Метод подстановки (заменой переменной)</u>*** – Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x=\varphi(t)$ и $dx=\varphi'(t)dt$ получается $\int f(x)dx=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$

Порядок вычислений:

1. некоторое выражение обозначаем другой переменной,
2. выражаем *dx* и другие функции через введенную переменную
3. далее выполняем подстановки под интегралом: подынтегральная функция будет выражена через новую переменную (пределы интегрирования при этом меняются в определенном интеграле),

4. высчитываем неопределенный интеграл относительно новой переменной,
5. снова переопределяем переменную (теперь уже выражаем через *x*), подставляем пределы интегрирования (в определенном интеграле).

Пример1. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{sinx} \cdot cosxdx$

$$\int \sqrt{sinx} \cdot cosxdx = \left\{ \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right\} = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}sin^{\frac{3}{2}}x + C$$

Пример2. Найти неопределенный интеграл $\int tgxdx$

$$\int tgxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = \left\{ \begin{matrix} cosx = t \\ -sinxdx = dt \\ sinxdx = -dt \end{matrix} \right\} = -\int \frac{dt}{t} = -ln|t| + C$$
$$= -ln|cosx| + C$$

Пример3. Найти неопределенный интеграл $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx$

$$\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx = \left\{ \begin{matrix} x^2+1 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right\} = \int t^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{2} = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \mathrm{C}$$

Пример4. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{1+lnx}{x}dx$

$$\int \frac{1+lnx}{x}dx = \left\{ \begin{matrix} lnx = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right\} = \int (1+t)dt = t + \frac{t^2}{2} + C = lnx + \frac{1}{2}ln^2x + C$$

III. ***Метод интегрирования по частям***

Метод интегрирования по частям заключается в применении формулы $\int udv = uv - \int vdu$ в случаях, когда интеграл, записанный справа проще для вычисления, чем заданный.

Порядок вычислений

1. Все подынтегральное выражение разбиваем на две части: одну обозначаем через u, другую – через dv;
2. Вычисляем дифференциал от функции du по формуле $du = u'(x)dx$ и функцию $v(x)$, интегрируя dv;
3. Применяем формулу интегрирования по частям;
4. Вычисляем интеграл $\int vdu$ и записываем окончательный ответ.

Рекомендации для выбора функций u и dv

1. При вычислении интегралов вида
   $\int P(x) \cdot lnxdx,\ \int P(x) \cdot arcsinx\ dx, \int P(x) \cdot arctgx\ dx$
   за функцию u принимается непосредственно $lnx, arcsinx, arctgx$.

2. При вычислении интегралов вида
$\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)sinkx\ dx,\ \int P(x)\cos kx\ \ dx,$
за функцию u принимается многочлен $P(x)$.

3. При вычислении интегралов вида $\int e^{ax}sinbx\ dx$, $\int e^{ax}cos\ bx\ dx$ формула интегрирования по частям применяется последовательно 2 раза, причем оба раза за u выбирается либо показательная функция, либо тригонометрическая.

Пример 1: Вычислите $\int(2x+1)\cdot e^{3x}dx$

Решение: Пусть $u = 2x+1$, тогда $du = 2dx$

$dv = e^{3x}dx$, проинтегрируем обе части этого равенства, получим:

$\int dv = \int e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Таким образом: $\begin{vmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix}$

Подставляем полученные выражения в формулу интегрирования по частям:

$$\int(2x+1)\cdot e^{3x}dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2dx = \frac{2x+1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C =$$

$$= e^{3x}\cdot\left(\frac{2x+1}{3} - \frac{2}{9}\right) + C$$

Пример 2: Вычислите $\int(4x-2)cos2xdx$

$$\int(4x-2)cos2xdx = \begin{Bmatrix} 4x-2 = u, & dv = cos2xdx \\ du = 4dx, & v = \frac{1}{2}sin2x \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(4x-2)sin2x - \frac{4}{2}\int sin2xdx = (2x-1)sin2x + cos2x + C$$

Проверь себя

1. Установите соответствие между функциями и их первообразными

1)	$y = 2e^x$	а)	$2^x ln2 + C$
2)	$y = \frac{2}{x}$	б)	$2e^x + C$
3)	$y = 2^x$	в)	$2ln\lvert x\rvert + C$

2. Множество всех первообразных функции $y = 7^x$ имеет вид

1) $\frac{7^x}{ln7} + C$

2) $-\frac{7^x}{ln7}+C$
3) $7^x ln7+C$
4) $\frac{7^{x+1}}{ln7+1}+C$

3. Если $\int f(x)dx = x^3-4x+C$, тогда функция $f(x)$ имеет вид
1) $\frac{x^4}{4}-2x^2$
2) $3x^2-4$
3) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$
4) $3x^2-4x+C$

4. Если $\int f(x)dx = 5tgx+C$, тогда функция $f(x)$ имеет вид
1) $5ctgx$
2) $-\frac{5}{cos^2x}$
3) $\frac{5}{sin^2x}$
4) $\frac{5}{cos^2x}$

5. Уравнение пути, если тело движется со скоростью $v = 3t^2+4$ (м/с) имеет вид
1) $\frac{t^3}{3}+4t$
2) t^3+4t+C
3) $6t$
4) $6t+C$

6. Установите соответствие

Свойство неопределенного интеграла	Пример применения
1. $\int k\cdot f(x) = k\int f(x)$	а) $\int 3x\cdot dx = 3\int x\cdot dx = 3\frac{x^2}{2}+C$
2. $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx$	б) $(\int 3x^2\,dx)' = 3x^2$
3. $\int f'(x)dx = f(x)+C$	в) $\int(x^2+x)dx = \int x^2\,dx+\int xdx$
4. $(\int f(x)dx)' = f(x)$	*г)* $\int(sinx)'dx = sinx+C$

7. Установите соответствие

Пример	Формула таблицы интегралов
1. $\int\frac{dx}{x^5}$	а) $\int\frac{dx}{x} = ln\|x\|+C$

2. $\int 2^x\,dx$	б) $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C, a > 0, a \neq 1$
3. $\int 4dx$	в) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{5x}$	г) $\int dx = x + C$

8. Продолжите высказывание: «Результат интегрирования можно проверить операцией …»

9. Каждому примеру сопоставьте метод интегрирования

Пример	Метод интегрирования
1. $\int \frac{x^2-1}{x-1} dx$	а) заменой переменной
2. $\int (2x+3)^{10}\,dx$	б) непосредственное
3. $\int x^5 \cdot e^x dx$	в) по частям

10. Воспользуйтесь таблицей интегралов и сопоставьте значение k для каждого примера

Пример	Значение k
1. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{2k} ln \frac{x-k}{x+k} + C$	4
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = arsin \frac{x}{\lvert k \rvert} + C$	5
3. $\int \frac{dx}{x^6} = \frac{x^{-k}}{-k} + C$	1
4. $\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+k}}{\frac{1}{3}+k}$	3

Эталон ответов: **1.** 1–б, 2–в, 3–а; **2.** 1); **3.** 2); **4.** 4); **5.** 2); **6.** 1–а, 2–в, 3–г, 4–б; **7.** 1–в, 2–б, 3–г, 4–а; **8**. дифференцирования; **9.** 1–б, 2–а, 3–в; **10.** 1–г, 2–а, 3–б, 4–в.

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Понятие первообразной функции.
2. Понятие неопределенного интеграла.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Основные табличные интегралы.
5. Методы интегрирования.
6. Прикладные задачи неопределенного интеграла.
7. Выполните задания:

   Е.В. Филимонова. Математика: стр. 191 № 1-15; стр. 195: № 1-4; стр. 199: № 2,4,6

   Или

   Е.В. Филимонова. Математика и информатика: стр. 74: № 1-15; стр. 78: № 1-4; стр. 82: № 2,4,6

Вычислите неопределенные интегралы

1) $\int u^{11} du$

2) $\int 5dt$

3) $\int \frac{dx}{4}$

4) $\int x\sqrt{2}$

5) $\int ax^p dx$

6) $\int \frac{2a^2x^2}{b^2} dx$

7) $\int \frac{dt}{t^5}$

8) $\int x^2(1+2x)dx$

9) $\int 4(2x-1)^2 dx$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

11) $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$

12) $\int \sqrt{2x+3}dx$

13) $\int (3+5x)^4 dx$

14) $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»; 9-10 баллов «4»; 6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

Решите задачи:

5.1. Дано уравнение скорости движения тела $v = t^2 - 4t + 1$ (м/с). Найдите уравнение пути, если тело за первые 3 с прошло путь 24 м.

5.2. Найдите закон изменения скорости тела, если уравнение ускорения имеет вид: $a = 3t^2 - 4t + 4\ м/с^2$ и если через 2 с скорость тела была 16 м/с.

5.3. Найдите первообразную функции $f(x) = x^2 - 1$, если при $x = -3$ она равна -4.

5.4. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin x - \cos x$, если при $x = \frac{\pi}{4}$ она равна $4\sqrt{2}$.

Вычислите неопределенные интегралы

5.5. $\int (2x^2 + 6x - 7)\, dx$

5.6. $\int (2sinx + 3cosx)\, dx$

5.7. $\int (2x^7 + 3x^2 - 1 + 6^x)\, dx$

5.8. $\int \frac{2}{x^3} dx$

5.9. $\int x\sqrt{x}\, dx$

5.10. $\int (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{5x} + 1) dx$

5.11. $\int \frac{6x^4 + 7x^3 + 3x - 2}{4x^2} dx$

5.12. $\int \frac{4x^7 + 5x^3 - x + 1}{6x^2} dx$

5.13. $\int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$

5.14. $\int \left(\frac{1}{x^7} - \frac{2}{x^5}\right) dx$

5.15. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

5.16. $\int \frac{(x^2 + 3)(x - 1)}{x^2} dx$

5.17. $\int \left(\sqrt{x} + 2\right)^2 dx$

5.18. $\int (x^2 - 2)\,(x + 3) dx$

5.19. $\int \frac{36 - x^2}{6 - x} dx$

5.20. $\int 3^x \cdot 7^x dx$

5.21. $\int \frac{sin2x}{3sinx} dx$

5.22. $\int e^x \cdot \left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$

5.23. $\int \left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

5.24. $\int \mathrm{tg}^2\, x\, dx$

II уровень

Вычислите неопределенные интегралы

5.25. $\int \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} - \frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) dx$

5.26. $\int \frac{3cos2x}{cos^2 x} \cdot dx$

5.27. $\int (a+bx)^2 dx$

Проинтегрируйте функции, применяя метод замены переменной

5.28. $\int \frac{x^2}{x^3+5} dx$

5.29. $\int (3x-1)^{30} dx$

5.30. $\int xe^{x^2} dx$

5.31. $\int \frac{2x^3}{x^4+3} dx$

5.32. $\int \frac{dx}{xlnx}$

5.33. $\int \cos(5x-7)\, dx$

5.34. $\int \cos^2 3x\, dx$

5.35. $\int \sqrt{2x+3} dx$

5.36. $\int x^2\sqrt{x^3+5} dx$

5.37. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$

5.38. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

5.39. $\int \frac{dx}{16+9x^2}$

5.40. $\int \frac{sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

5.41. $\int ctgx\, dx$

5.42. $\int \sin^4 x \cdot cosxdx$

5.43. $\int \cos^7 x \cdot sinxdx$

III уровень

5.44. $\int x^3 \cdot e^{x^4} dx$

5.45. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

5.46. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$

5.47. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$

5.48. $\int \sqrt{sinx} \cdot cosxdx$

5.49. $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx$

5.50. $\int \frac{cosx}{\sqrt{sin^3x}}dx$

5.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

5.52. $\int e^{cos^2x} sin2xdx$

5.53. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

5.54. $\int \frac{dx}{cos^2 x(3tgx+1)}$

5.55. $\int \frac{cosxdx}{sin^2 x - 6sinx + 5}$

Примените метод интегрирования по частям

5.54. $\int lnxdx$

5.55. $\int xlnxdx$

5.56. $\int (x^2+x)lnxdx$

5.57. $\int x \cdot cosxdx$

5.58. $\int x \cdot e^x dx$

5.61. $\int (x^2-4)sinxdx$

5.62. $\int xcos3xdx$

5.63. $\int x^2 sinxdx$

5.64. $\int \frac{lnx}{x^3}dx$

5.65. $\int x^2 e^{5x} dx$

6. Определенный интеграл и его приложение к решению задач

Актуальность темы

Определенный интеграл применяется для решения таких прикладных задач, как: вычисление площадей плоских фигур, объёмов тел вращения, длин дуг, работу сил за определённый промежуток времени, среднее значение функций и т. п.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- Вычислять определенный интеграл.
- Решать прикладные задачи с применением определенного интеграла.

Обучающийся должен знать:

- Понятие определенного интеграла, формулу Ньютона-Лейбница.
- Свойства определенного интеграла.
- Геометрический смысл определенного интеграла.
- Области применения определенного интеграла.

Ключевые понятия и формулы

Определение: *Определенным интегралом от a до b* называется приращение первообразной *F этой функции, т.е.* $F(b) - F(a)$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (6.1)$$

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (6.2)$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (6.3)$$

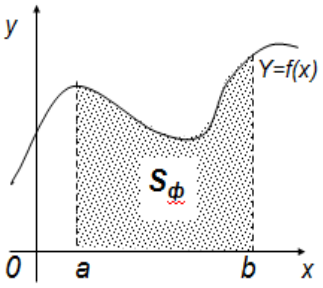
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (6.4)$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (6.5)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c \in (a; b) \qquad (6.6)$$

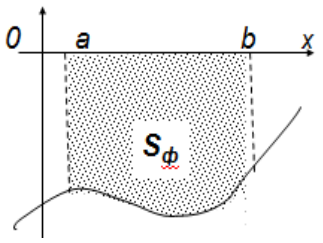
Вычисление площади криволинейной трапеции

Если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то



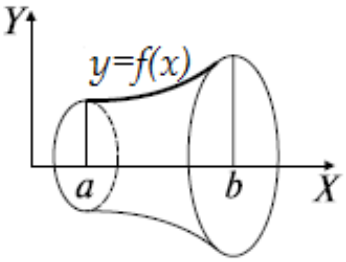
$$S = \int_a^b f(x)dx, \ f(x) \geq 0$$

(6.7)



$$S = -\int_a^b f(x)dx, \ f(x) \leq 0$$

Вычисление объема тела вращения



Пусть криволинейная трапеция D с границей $y = f(x)$, $x = a, x = b\ (a < b), y = 0$ вращается вокруг оси OX. Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx} \qquad \textbf{(6.8)}$$

Средним значением функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a; b]$ называется величина, определяемая соотношением:

$$\boldsymbol{\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx} \qquad \textbf{(6.9)}$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_2^3 (6x + 4) dx$

Решение: Неопределенный интеграл $\int (6x + 4) dx = 3x^2 + 4x$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла, получим:

$$\int_2^3 (6x + 4) dx = (3x^2 + 4x)|_2^3 = (3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3) - (3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2) = 39 - 20$$
$$= 19$$

Ответ: 19

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx$

Решение: Неопределенный интеграл $\int \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx = x + 4e^{\frac{x}{4}}$.

$$\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx = \left(x + 4e^{\frac{x}{4}}\right)\Big|_0^4 = (4 + 4e) - (0 + 4) = 4e$$

Ответ: $4e$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^3 x\sqrt{1 + x} dx$.

Решение: Пример решим методом замены переменной и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^3 x\sqrt{1 + x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + x} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{array} \middle| \begin{array}{c} \textit{найдем новые пределы интегрирования} \\ t_{\textit{нижний предел}} = \sqrt{1 + 0} = 1 \\ t_{\textit{верхний предел}} = \sqrt{1 + 3} = 2 \end{array} \right\}$$

$$= \int_1^2 (t^2 - 1)t \cdot 2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 (t^4 - t^2)tdt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3} - \frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3}\right) = 2 \cdot \frac{58}{15} = \frac{116}{15}$$

Ответ: $\frac{116}{15}$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^3 e^{sinx} cosxdx$

Решение:

$$\int_0^3 e^{sinx}\, cosxdx = \left\{ \begin{matrix} sinx = t \\ d(sinx) = dt \\ cosxdx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \textit{новые пределы интегрирования:} \\ t_{\textit{нижний предел}} = sin0 = 0 \\ t_{\textit{верхний предел}} = sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{matrix} \right\} = \int_0^1 e^t dt = e^t\Bigg|_0^1 = e - 1$$

Ответ: $e - 1$

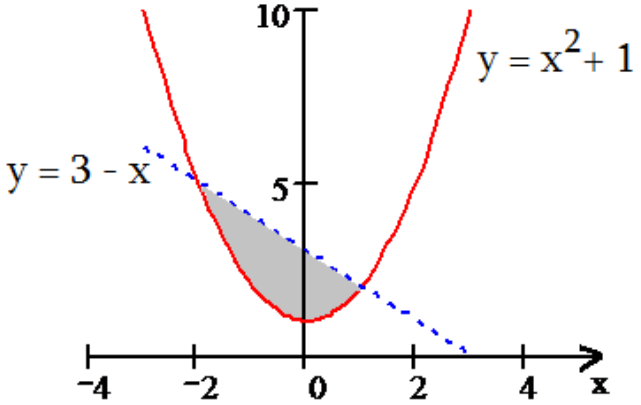
Пример 5. Найти среднее значение функции $y = \ sinx$ на отрезке $[0; \pi]$.

Решение: $\overline{f} = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi sinxdx = \frac{1}{\pi}(-cosx)|_0^\pi = \frac{1}{\pi}(cos\pi - cos0) = \frac{2}{\pi}$

Ответ: $\frac{2}{\pi}$

Пример 6. Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$

Решение: На рисунке представлена фигура, площадь которой требуется найти.



Найдем точки пересечения параболы и прямой для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

При решении квадратного уравнения системы $x^2 + x - 2 = 0$, получаем два корня $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

Дальше систему уравнений можно не решать, т.к. нас интересуют только абсциссы точек пересечения.

$f_1(x) = \ x^2 + 1,\ f_2(x) = 3 - x$ (т.к. прямая лежит выше параболы в рассматриваемой области).

Теперь можно вычислить площадь фигуры:

$$S = \int_{-2}^{1}\big((3-x)-(x^2+1)\big)dx = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx = \left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= \left(2\cdot 1-\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(2\cdot(-2)-\frac{(-2)^2}{2}-\frac{(-2)^3}{3}\right) = 4{,}5\ (\textit{кв. ед})$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Проверь себя

1. Если скорость материальной точки, движущейся прямолинейно выражается функцией $v(t) = 1 + 5t$, тогда путь S, пройденный точкой за время $t = 3$ с от начала движения будет рассчитываться по формуле

1) $S = (1+5t)'$ 2) $S = \int_0^3 (1+5t)dt$

3) $S = \int (1+5t)dt$ 4) $S = 1 + 5\cdot 3 = 16$

2. Выберите верную запись вычисления определенного интеграла

1) $\int_1^3 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_3^1 = \frac{1^4}{4}-\frac{3^4}{4} = \frac{1-81}{4} = -20$

2) $\int_1^3 x^3dx = 4x^4|_1^3 = 4\cdot 3^4 - 4\cdot 1^4 = \frac{1-81}{4} = 320$

3) $\int_1^3 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4} = \frac{81-1}{4} = 20$

4) $\int_1^3 x^3dx = 3x^2|_1^3 = 3(3^2-1^2) = 24$

3. Выберите ошибочную запись

1) $\int_1^1 5x^6dx = 0$

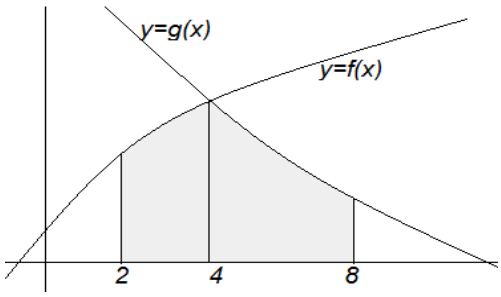
2) $\int_{-1}^1 5x^6dx = 5\int_{-1}^1 x^6dx$

3) $\int_{-1}^1 5x^6dx = -5\int_1^{-1} x^6dx$

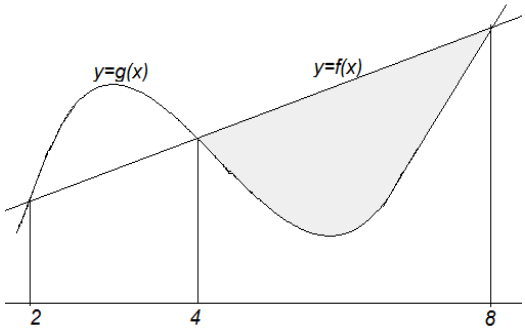
4) $$\int_{-1}^{1} 5x^6 dx = 5\int_{-1}^{0} x^6 dx + \int_{0}^{1} x^6 dx$$

4. Установите соответствие фигуры и формулы вычисления ее площади

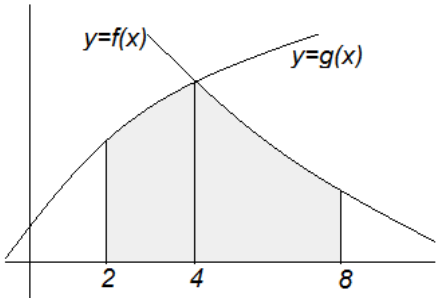
1)



2)



3)



а) $$S = \int_{2}^{4} g(x)dx + \int_{4}^{8} f(x)dx$$

б) $$S = \int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{8} g(x)dx$$

в) $$S = \int_{4}^{8} \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

5. К какому виду приведется определенный интеграл, если в вычислениях примените способ замены переменной

$$\int_{0}^{4} (1+2x)^5 dx \text{, если обозначить за } t = 1 + 2x$$

1) $\frac{1}{2}\int_{0}^{4} t^5 dx,$ 2) $2\int_{0}^{4} t^5 dx,$

3) $\frac{1}{2}\int_{1}^{9} t^5 dt,$ 4) $2\int_{1}^{9} t^5 dt,$

Эталон ответов: **1.** 2; **2.** 3; **3.** 4; **4.** 1-б, 2-в, 3-а; **5.** 3

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Понятие определенного интеграла.
2. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Вычисление площади криволинейной трапеции.
5. Другие приложения определенного интеграла.
6. Выполните задания:

   Филимонова Е.В. Математика. С. 206 №№ 1-6, С. 211 №1,4

   Филимонова Е.В. Математика и информатика: с 87-88 № 1-6, с. 91 №1,4

1) Найти определенный интеграл функций:

   а) $\int_1^2 xdx$ Ответ: 1,5

   б) $\int_0^3 x^2dx$ Ответ: 9

   в) $\int_0^1 (2x+1)dx$ Ответ: 2

   г) $\int_{-1}^0 (3x^2+1)dx$ Ответ: 2

   д) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$ Ответ: $\frac{1}{2}ln2$

2) Найти путь, пройденный телом за 3 с от начала движения:
   $V(t) = 3t^2 + 2t\ см/с$

   Ответ: S=36 см

3) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = -6;\ y - x = 7$

   Ответ: $S = 17{,}5 - 6ln6$

4) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
   $y = lnx; y = 0; x = e$

   Ответ: $S = 1$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»

9-10 баллов «4»

6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите интегралы

6.1. $\int_0^1 3x^5 dx$

6.2. $\int_1^2 \frac{7x^2 dx}{5}$

6.3. $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2 + 4x^3 + 5x^4) dx$

6.4. $\int_9^0 \sqrt{x} dx$

6.5. $\int_2^3 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$

6.6. $\int_2^{-3} \frac{x^4 - x^2}{x^2 + x} dx$

6.7. $\int_3^6 \frac{3dx}{5x}$

6.8. $\int_0^{-2} \frac{xdx}{(1+x^2)^3}$

6.9. $\int_{-\frac{2}{3}}^0 (4+6x)^3$

6.10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin6x\, dx$

6.11. $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 3cos3x\, dx$

6.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 12^{sinx} cosx\, dx$

6.13. $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2) dx$

6.14. $\int_0^1 (2 + 3x^2)\, x\, dx$

6.15. $\int_1^2 (3x - x^2) dx$

6.16. $\int_{-2}^3 (2x^3 - x^2 - 5) dx$

6.17. $\int\limits_0^1 (2+3x^2)^2 dx$

6.18. $\int\limits_1^{27} 4\sqrt[3]{x}dx$

6.19. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} cosx\, dx$

6.20. $\int\limits_1^2 \frac{8+x^3}{2+x} dx$

6.21. $\int\limits_1^{10} \frac{1+2x+3x^2}{x} dx$

6.22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x + sinx}{2} dx$

6.23. $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$

6.24. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{sin^2 x} - 2cosx\right) dx$

6.25. Найдите среднее значение функции $y = cosx$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

6.26. Найдите среднее значение функции $y = x^2 + 4x$ на отрезке $[-1; 2]$.

6.27. Найти среднее значение К(γ) издержек $K(x) = 3x^2 + 3x + 1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 4 единиц. Указать объем продукции γ, при котором издержки принимают среднее значение.

С помощью определенного интеграла вычислите площади фигур, ограниченные прямыми:

6.28. $y = 2x, x = 3, x = 5, y = 0$

6.29. $3x - y = 0, x - 4 = 0, x + 2 = 0, y = 0$

6.30. $3x + 2y - 12 = 0, x - y = 0, y = 0$

6.31. $3x + 2y - 12 = 0, x - y = 0, x = 0$

6.32. $x - 2y = 0, 2x - y = 0, x - 4 = 0$

6.33. $x - 2y - 6 = 0, y - 1 = 0, y - 2 = 0, x = 0$

6.34. Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями и объем тела вращения, образованного вращением фигуры вокруг оси ox: $y = 2x - x^2, y = 0$.

6.35. Область ограничена линиями: $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$ и $y = x^2 + 1$. Вычислите площадь фигуры и объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси ох.

6.36. Область ограничена линиями: $y = 0$ и $y = 6x - x^2$. Вычислите площадь фигуры.

6.37. Область ограничена линиями: $y = 0$ и $y = x^2 - 5x + 6$. Вычислите площадь фигуры.

II уровень

Вычислите значение определенного интеграла

6.38. $\int\limits_{-1}^{1} (2x-1)^3 dx$

6.39. $\int\limits_{1}^{2} 2^{3x} dx$

6.40. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} cos2x\, dx$

6.41. $\int\limits_{0}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$

6.42. $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2+1}$

6.43. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{sinx} cosx\, dx$

6.44. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosxdx}{2sinx+3}$

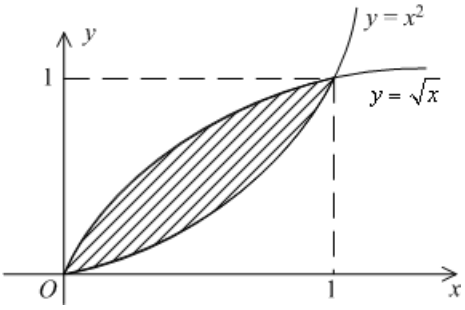
6.45. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{(x^2+5)^3}$

6.46. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{e^x+4}$

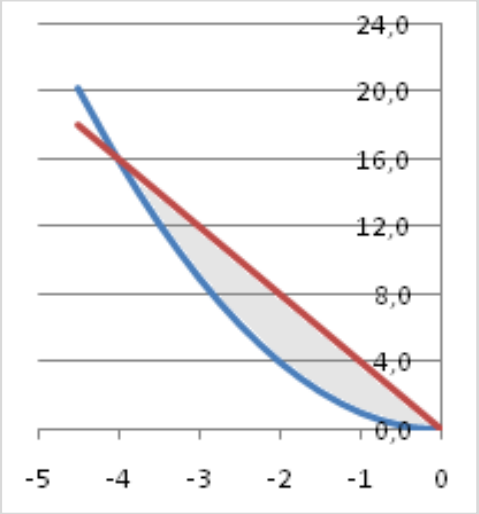
6.47. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} sinx \cdot cos^2 x\, dx$

6.48. Скорость точки меняется по закону $v = 100 + 8t$ м/с. Какой путь пройдет эта точка за 10 с от начала движения? Какой путь пройдет точка за промежуток времени с 3 по 7 секунду?

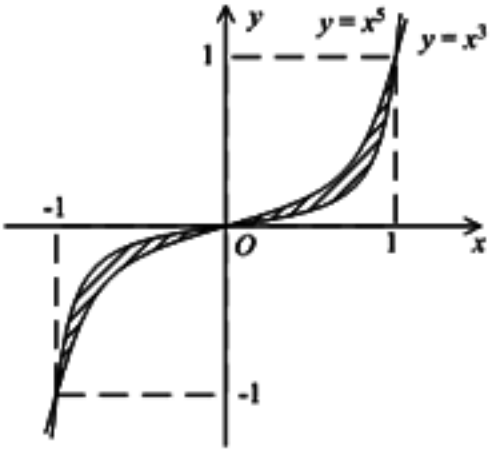
6.49. На рисунке изображена область D, ограниченная графиками функций $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Вычислите площадь области D и объем тела, образованного вращением области D вокруг оси ox.



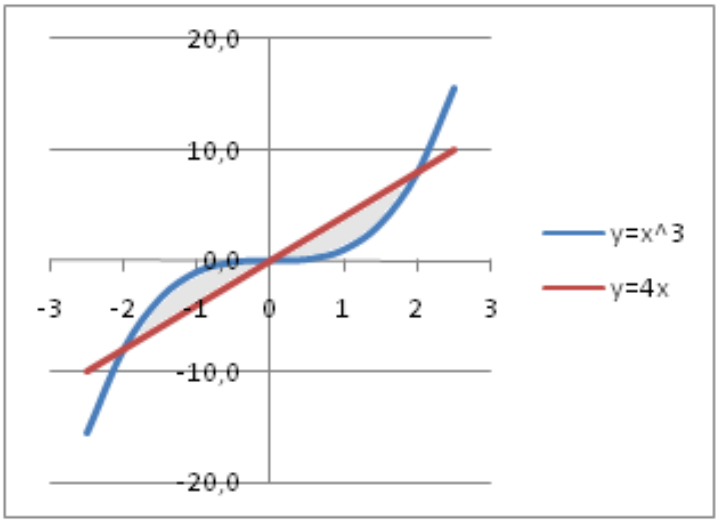
6.50. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = -4x$



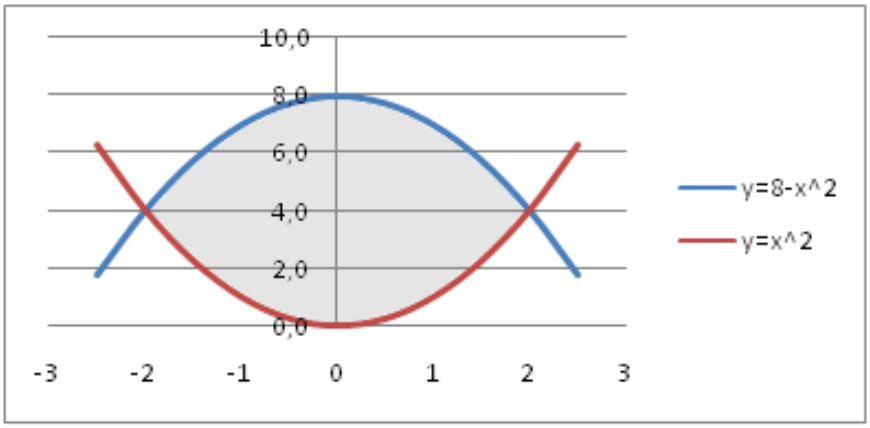
6.51. На рисунке изображена область D, ограниченная графиками функций $y = x^3$ и $y = x^5$. Вычислите ее площадь и объем тела, образованного вращением области D вокруг оси ox.



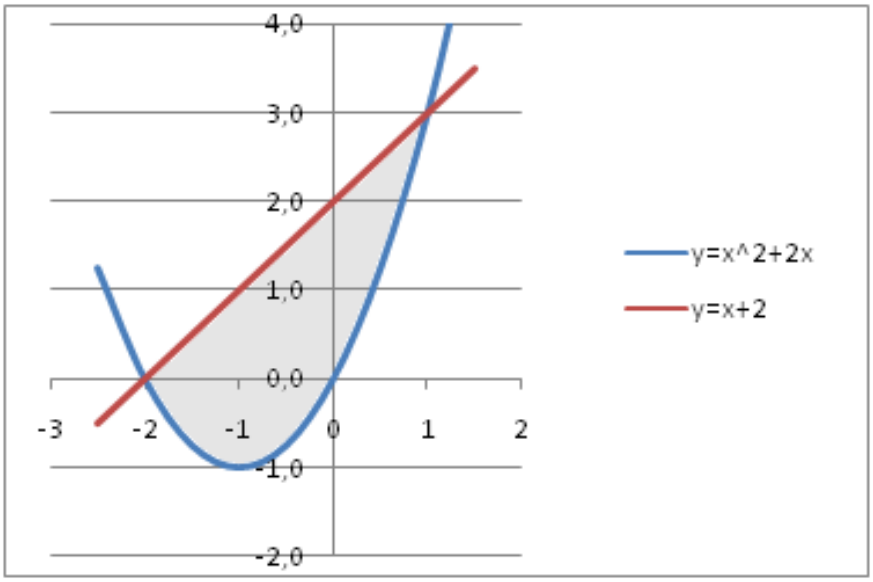
6.52. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x^3, y_2 = 4x$.



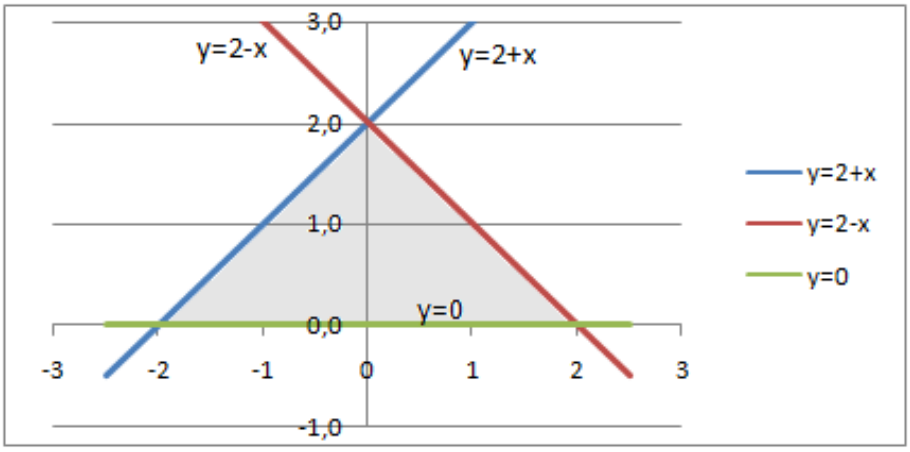
6.53. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 8 - x^2, y = x^2$



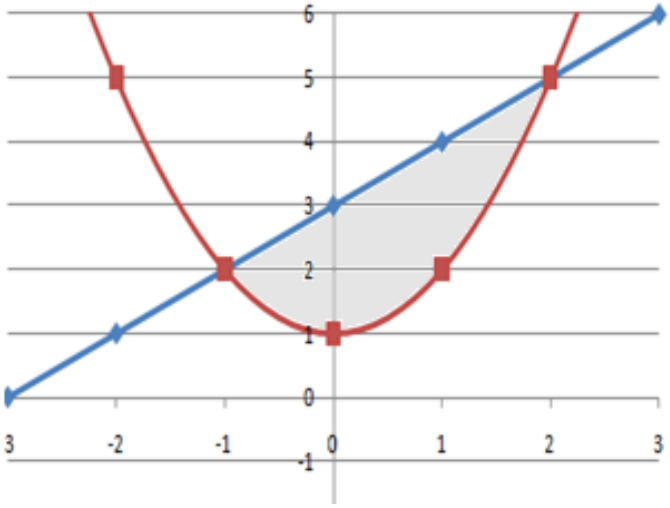
6.54. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x\ ;\ y = x + 2$



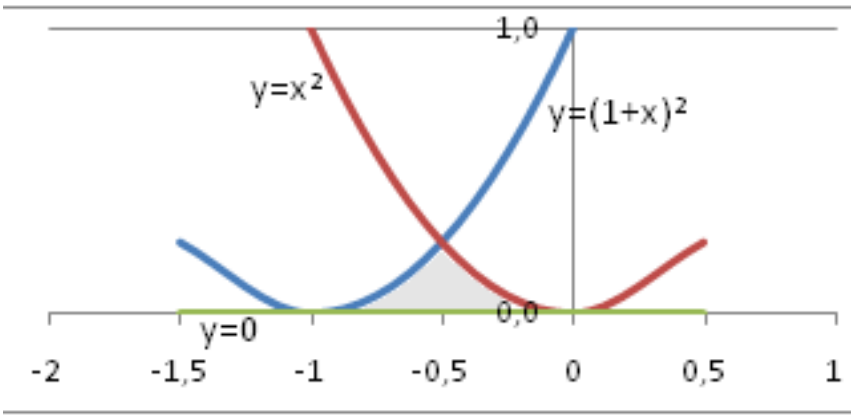
6.55. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 + x$, $y = 2 - x, y = 0$



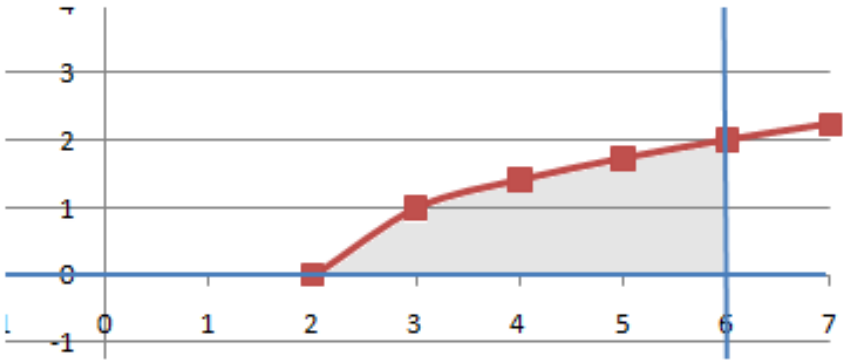
6.56. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $f_1(x) = x + 3$ и $f_2(x) = x^2 + 1$



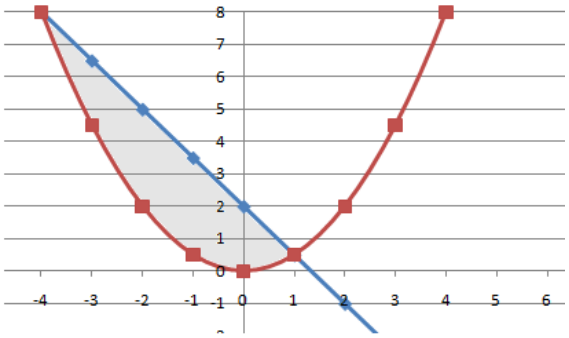
6.57. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (1 + x)^2$; $y = x^2$, $y = 0$



6.58. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0,\ y = \sqrt{x - 2},\ x = 6$. Рассчитайте объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси ох.



6.59. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = 2 - \frac{3}{2}x$



III уровень

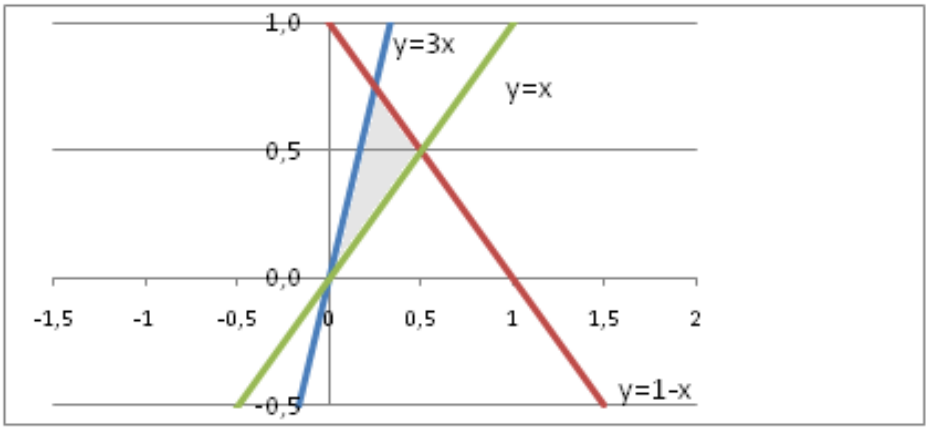
Вычислите значения определенных интегралов

6.60. $$\int_1^e \frac{3\,lnx + 5}{x} dx$$

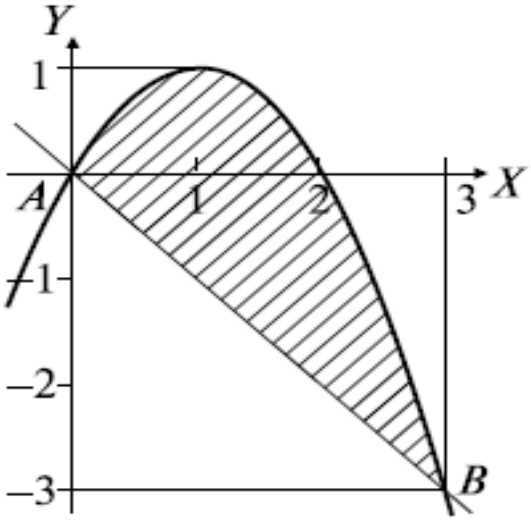
6.61. $$\int_{-a}^{a} (3x^2 - a)dx$$

6.62. $$\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt[3]{(2 - x^3)^2} dx$$

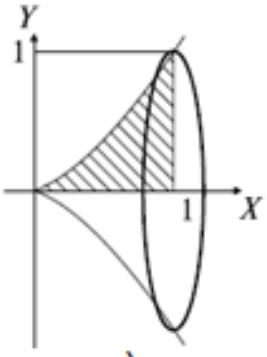
6.63. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x$, $y = 1 - x, y = x$



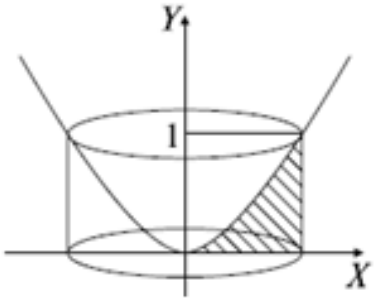
6.64. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$; $y = -x$



6.65. Дано ∂D: $y^2 = x^3, x = 1, y = 0$. Найти: а) V_x; б) V_y (объемы тел, полученных при вращении D вокруг OX и OY соответственно).



а)



б)

7. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике

Актуальность темы

Исследование многих физических и технических задач сводится к решению таких уравнений. С помощью дифференциальных уравнений описывают волновые процессы и колебания, поэтому практическое применение дифференциальных уравнений очень разнообразно.

В медицинских приложениях дифференциальные уравнения используются, например:

- для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определения вязкости крови и других параметров гемодинамики;
- для описания медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография;
- для описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных
- для определения функции изменения численности популяции микроорганизмов в зависимости от времени.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- находить общие и частные решения ДУ с разделяющимися переменными;
- находить общие и частные решения ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами;
- составлять ДУ для решения задач прикладного характера.

Обучающийся должен знать:

- понятие дифференциального уравнения (ДУ), порядок ДУ, общего и частного решения;
- понятие ДУ с разделяющимися переменными, алгоритм их решения
- понятие ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, алгоритм их решения;
- практическое применение ДУ в медицине.

Ключевые понятия и формулы

Дифференциальное уравнение – равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения $F(x, y, y', y''...) = 0$, F – некоторая известная функция, зависящая от нескольких переменных.

Порядок ДУ – порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Например, уравнение $y'' + 5y' - 3y = 0$ – диф.уравнение второго порядка.

Интеграл (или решение) уравнения – это функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Общее решение ДУ содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения.

Частное решение ДУ – функция, получаемая из общего решения при различных числовых значениях произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Уравнения вида $\boldsymbol{f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0}$ называется уравнением с разделяющимися переменными. Оно может быть приведено к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на $\varphi_1(y) f_2(x)$.

$$\frac{f_1(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(y) f_2(x)}dx + \frac{f_2(x)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y) f_2(x)}dy = 0$$

При условии, что $\varphi_1(y) f_2(x) \neq 0$. После сокращения получаем

$$\boldsymbol{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}}dx + \boldsymbol{\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}}dy = 0$$ Уравнение с разделенными переменными **(7.1)**

Интегрируя равенство, получаем:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$$

– общее решение уравнения, где С – произвольная постоянная.

Алгоритм решения ДУ с разделяющимися переменными:

1. Производную функции у представить как $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$
2. С помощью алгебраических операций преобразовать уравнение так, чтобы члены, содержащие y, находились в левой части равенства, а члены, содержащие x – в правой.

3. Проинтегрировать полученное равенство: левая часть по аргументу y, а правая – по аргументу x. Неопределенная постоянная *C* добавляется в правую часть равенства после вычисления интеграла по x.
4. Решить уравнение относительно y и находим общее решение.
5. Подставляя в общее решение значения x и y из дополнительных условий, находим значение неопределенной постоянной *C* и вид частного решения.

Пример 1. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;3)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен $3x^2 - 2$.

Решение: угловой коэффициент касательной – есть производная функции в данной точке, поэтому составим дифференциальное уравнение:

$$y' = 3x^2 - 2$$

Воспользуемся алгоритмом решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

5) По определению дифференциала функции $dy = y' \cdot dx$, откуда $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

6) Домножим обе части равенства на dx

$$dy = (3x^2 - 2)dx$$

7) Проинтегрируем обе части равенства: левую по переменной y, правую – по x:

$$\int dy = \int (3x^2 - 2)dx$$

$$y = \frac{3x^3}{3} - 2x + C$$

$y = x^3 - 2x + C, C \in R$ – *общее решение дифференциального уравнения, множество кривых с угловым коэффициентом в любой точке* $y = 3x^2 - 1$

8) Т.к. кривая проходит через точку $\mathrm{A}(1;3)$, подставим ее координаты в полученное уравнение и определим значение C:

$$3 = 1^3 - 2 \cdot 1 + C$$

$$C = 4$$

9) Частное решение дифференциального уравнения имеет вид:
$y = x^3 - 2x + 4$ – уравнение кривой.
Ответ: $y = x^3 - 2x + 4$

Пример 2. Концентрация лекарственного вещества в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации равна 0,02 концентрации вещества в данный момент. Определите зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,4 мг/л.

Решение:

Пусть К – концентрация вещества в данный момент времени. Скорость изменения концентрации K в момент t связана соотношением: $-\frac{dK}{dt} = 0{,}02K$, знак «–» означает убывание концентрации с ростом времени.

$\frac{dK}{dt} = -0{,}02K$ – домножим обе части равенства на dt

$dK = -0{,}02Kdt$ – разделим обе части на *K*

$$\frac{dK}{K} = -0{,}02dt$$

$\ln K = -0{,}02t + C, C \in R$

$\ln K = \ln e^{-0{,}02t} + \ln C\,, C \in R$

$\ln K = \ln\ Ce^{-0{,}02t}\,, C \in R$

$K = Ce^{-0{,}02t}$ - общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение:

при $t = 0\ \ K_0 = 0{,}4$ *мг/л*

$$0{,}4 = Ce^{-0{,}02\cdot 0}$$

$C = 0{,}4$

Таким образом, $K(t) = 0{,}4e^{-0{,}02t}$ – закон уменьшения концентрации вещества в крови.

Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0} \qquad \textbf{(7.2)}$$

Для решения уравнения такого вида составляют характеристическое уравнение: $ak^2 + bk + c = 0$ – квадратное уравнение. Находим дискриминант: $D = b^2 - 4ac$ и будем рассматривать 2 случая:

- если $D > 0$, $k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, общее решение диф.уравнения будет иметь вид:

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}} \qquad \textbf{(7.3)}$$

- если $D = 0$, $k_1 = k_2 = \frac{-b}{2a}$, общее решение диф.уравнения будет иметь вид:

$$\boldsymbol{y(t) = e^{kt}(C_1 + C_2 t)} \qquad \textbf{(7.4)}$$

Пример 3. Решите дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - y' - 6y = 0$, найдите частное решение, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$

Решение: составим характеристическое уравнение

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 25$$

$$k = \frac{1 \pm 5}{2}, k_1 = 3, k_2 = -2$$

Т.к. корни характеристического уравнения не равны, запишем ответ в виде (формула 7.3.)

$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$ – общее решение дифференциального уравнения.

По условию $y(0) = -3$, т.е.(подставляем в общее решение)

$$3 = C_1 + C_2$$

$y'(t) = 3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t}$, $y'(0) = 4$, $4 = 3C_1 - 2C_2$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 4 = 3C_1 - 2C_2 \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$

Частное решение имеет вид:

$$y(t) = 2e^{3t} + e^{-2t}$$

Ответ: $y(t) = 2e^{3t} + e^{-2t}$

Проверь себя

1. Решением дифференциального уравнения $y' = 2x + 3$ является
   1) $y = x^2 + 3x - 1$
   2) $y = 2$
   3) $y = x^2 + 3$
   4) $y = 2x$

2. Если функция $y = Ce^x - 7$ является решением дифференциального уравнения $y' = 5e^x$, тогда значение С равно
   1) 7
   2) -7
   3) 0,2
   4) 5

3. Общим решением дифференциального уравнения $y' = 4x^3$ является
   1) $4x^4 + C$
   2) $12x^2$
   3) $x^4 + C$
   4) $12x^2 + C$

4. Дифференциальное уравнение $xdy = \frac{dx}{y^2}$ в результате разделения переменных сводится к уравнению
   1) $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$
   2) $y^2 dy = \frac{dx}{x}$
   3) $\frac{dy}{y^2} = xdx$
   4) $\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y^2}$

5. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, тогда корни характеристического уравнения равны
   1) $k_1 = 2,\ \ k_2 = 0$
   2) $k_1 = 2,\ \ k_2 = 1$
   3) $k_1 = k_2 = -2$
   4) $k_1 = k_2 = 2$

Эталон ответов: 1 – 1); 2 – 4); 3 – 3); 4 – 2); 5 – 4)

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Обыкновенного дифференциального уравнения.
3. Порядок дифференциального уравнения.
4. Интеграл (решение) дифференциального уравнения.
5. Общее решение, частное решение.
6. Уравнения с разделяющимися переменными.
7. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
8. Выполните задания:
   Филимонова Е.В. Математика: с. 345 № 1 (a,b) 3,4 ; с. 350 № I (1,3,4) (с 320 пример 12, 13)

   1) Проинтегрируйте следующие уравнения
      а) $ydx - xdy = 0$ *Ответ*: $y = Cx$
      б) $(1 + y)dx = (1 - x)dy = 0$ *Ответ*: $(1 + y)(1 - x) = C$
   2) Найдите уравнение кривой, угловой коэффициент касательной в любой точке которой равен $3x - 2$.
      Ответ: $y = 1{,}5x^2 - 2x + C$
   3) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $(0; 3)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой точке равен $x^2 + 5x$
      Ответ: $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3$
   4) Решите уравнения:
      а) $y'' + 3y' - 4y = 0$ *Ответ*: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$
      б) $y'' - 9y = 0$ *Ответ*: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$
      в) $y'' - y = 0$ *Ответ*: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	5
2. Проверочная работа.	5
Итого	10

9-10 баллов «5»
7-8 баллов «4»
5-6 баллов «3»

Практические задания

I уровень

Проверьте, является ли функция y=f(x) решением дифференциального уравнения

7.1. $y = \sqrt{x}$, $2yy' = 1$

7.2. $y = Cx^2 - \frac{1}{x}$, $\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = \frac{3}{x^2}$

7.3. $y = e^{-x} + x$, $y' + y = 1 + x$

7.4. $y^2 = x^2 - 4x$, $xdy - ydx = x^2dx$

7.5. $y^2 = 2x - 4x^2$, $4 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{2yy'}{x} = 0$

7.6. $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$, $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$

Найдите общее решение уравнения:

7.7. $y' = 6x^3$

7.8. $y' = \frac{x}{y^2}$

7.9. $y' = \frac{x^2}{y}$

7.10. $yy' + x = 0$

7.11. $dy - 2\sqrt{y}dx = 0$

7.12. $y' = 3\sqrt[3]{x^2}$

7.13. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

7.14. $y' = 1 + y^2$

7.15. $y' + xy = 0$

7.16. $y' = 2\sqrt{y}$

7.17. $y^2dy + xdx = 0$

7.18. $y' = -\frac{x}{y}$

7.19. $4x - 3y^2y' = 0$

7.20. $y' = xy^2$

7.21. $y^2dy = xdx$

7.22. $y' = y^2cosx$

II уровень

Найдите общее решение дифференциального уравнения

7.23. $y' - \sqrt{xy} = 0$

7.24. $y' = \frac{x+1}{y-2}$

7.25. $y' = y^2sinx$

7.26. $y'tgx - y = 1$

7.27. $y' = (1-x)cos^2y$

7.28. $(x+3)dy - (y+3)dx = 0$

7.29. $cosx\frac{dy}{dx} = (y+1)sinx$

7.30. $\sqrt{y}dx + \frac{1}{sinx}dy = 0$

Найдите общее и частное решения уравнений при заданных начальных условиях

7.31. $y' = \sqrt{x}$; $y(0) = 5$

7.32. $ydx + xdy = 0$; $A(-2;-4)$

7.33. $y' - sinx = 0$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

7.34. $x^2y' + y^2 = 0$; $A(1;-1)$

7.35. $y' = \sqrt[3]{y^2}$; $A(0;1)$

7.36. $y' = \frac{1}{2y}$; при $x = 0, y = 2$

7.37. $y' = \frac{1}{3cos^2x}$; при $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{3}$

7.38. $y'y = x - 2$; $y(0) = 1$

7.39. Найдите закон движения тела по оси 0x, если оно двигается со скоростью $v = 2t + 3$.

7.40. Найдите закон движения тела по оси 0x, если оно начало двигаться из точки M $(4; 0)$ со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

7.41. Найдите уравнение кривой, угловой коэффициент касательной в любой точке которой равен $3x - 2$.

7.42. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(3,4)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен $2x + 5$.

7.43. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(0, 3)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен $x^2 + 5x$.

7.44. Составить уравнение кривой, проходящей через точку M $(2; -3)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $4x - 3$.

7.45. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $(0; 2)$, тангенс угла наклона которой во всякой точке равен $\frac{1}{3y^2}$.

7.46. Тело движется со скоростью, которая в каждый момент времени t определяется по формуле $v = 5t^2 - 2$ м/с. Найдите закон движения тела и путь, пройденный телом за 3 с от начала движения.

7.47. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить:
а) как далеко будет оно отстоять от точки отправления спустя 3 с.
б) за какое время тело пройдет 360 м, считая от точки отправления.

7.48. Определите кривую, проходящую через точку $A(-1,1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

Решите однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

7.49. $y'' + 6y' + 9y = 0$

7.50. $y'' + 3y' + 2y = 0$

7.51. $y'' - 6y' + 9y = 0$

7.52. $y'' - 7y' + 10y = 0$

7.53. $y'' - 7y' + 12y = 0$

7.54. $y'' - y' - 2y = 0$

7.55. $y'' + 4y' - 5y = 0$

7.56. $y'' + 5y' + 6y = 0.$ Начальные условия $y(0) = 1, y'(0) = -6$

7.57. $y'' - 10y' + 25y = 0.$ Начальные условия: $y(0) = 0, y'(0) = 1$

7.58. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 7,\ \ y'(0) = 11$

7.59. $y'' + 8y' + 16y = 0, y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5$

III уровень

Найдите общее решение дифференциального уравнения

7.60. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

7.61. $(1 + e^{2x})y^2dy = e^{2x}dx$

7.62. $y' = tgx \cdot tgy$

7.63. $(x + 1)^3dy - (y - 2)^2dx = 0$

7.64. $sinx \cdot cosydx + cosx \cdot sinydy = 0$

7.65. $y' = 1 + y^2$

7.66. $y' + ycosx = 0$

7.67. $x^2dy + (\mathrm{y} - \mathrm{a})\mathrm{dx} = 0$

7.68. $ydx - xdy = 0$

Найдите общее и частное решения уравнений

7.69. $2y'\sqrt{x} = y$ при $x = 4, y = 1.$

7.70. $y' = -\frac{y}{x}$, при $\mathrm{x} = 1, \mathrm{y} = 2.$

7.71. $(2x + 1)dy + y^2dx = 0$ при $y = 1, x = 4.$

7.72. $y' = xy$, если $\mathrm{y}(0) = 5.$

7.73. $x^2\frac{dy}{dx} = y$ при $x = 1, y = 5$

7.74. $y' = \frac{y}{4x}$ при $y = -10, x = 16$

7.75. $\frac{dy}{y} = (x - 1)dx,$ при $x = 2, y = 10$

7.76. $\frac{xdx}{y} - dy + \frac{dx}{4y} = 0,\ \ (y \neq 0),$ при $x = 4\ \ \ y = 5$

7.77. $\frac{y'}{y+1} = \frac{sinx}{cosx}$ при $y(0) = 0$

7.78. $y' + ytgx = 0$ при $y(0) = 2$

7.79. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$ при $y(0) = 1$

7.80. Найдите закон движения и скорости движущего тела, если скорость его возрастает пропорционально пройденному пути и если в начальный момент движения находилось в 8 метрах от начала отсчета пути и имело скорость 24 м/с.

7.81. Концентрация лекарственного вещества в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 часа уменьшилась вдвое.

7.82. Скорость растворения лекарственного вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке. Известно, что при $t = 0$, $m = m_0$. Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.

7.83. Скорость размножения бактерий в благоприятной среде пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.

7.84. Популяция бактерий x(t) растет так, что скорость ее роста в момент времени t (t – часы) равна одной десятой от размера популяции. Описать этот процесс роста дифференциальным уравнением. Чему равен размер популяции спустя 10 часов, если начальное условие x(0)=1000?

7.85. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. Какова будет стоимость оборудования по истечении t лет?

7.86. Скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За 10 минут тело охладилось от 100 до 60 градусов. Температура среды постоянна и равна 20 градусам. Когда тело остынет до 25 градусов?

8. Числовые множества, действия над ними. Основные понятия теории графов.

Актуальность темы

Понятие множества является первоначальным математическим понятием. Процесс расширения понятия числа от натуральных к действительным был связан как с потребностями практики, так и с нуждами самой математики.

Математически грамотно при решении обычных квадратных уравнений, имеющих отрицательный дискриминант говорить и писать, что уравнение не имеет действительных корней. При этом обучающиеся должны быть знакомы с мнимыми числами, и если требуется, то вычислить корни уравнения, являющиеся мнимыми числами. Знание комплексных чисел расширяет кругозор, делает осмысленными решение уравнений и неравенств, тригонометрические функции, а в дальнейшей практической жизни – исследования.

Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы, а также решать транспортные задачи, связанных с перевозкой грузов по сети и др.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- задавать числовые множества;
- выполнять операции с числовыми множествами;
- выполнять действия над комплексными числами;
- переводить комплексные числа из одной формы представления в другую;
- применять графический метод при выполнении операций с множествами;
- решать задачи с применением графов.

Обучающийся должен знать:

- обозначения множеств, способы задания множеств;
- операции над множествами;
- понятие комплексного числа;
- формы представления комплексного числа;
- действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме;
- понятие графа, элементы графа;

– операции с графами;
– практическое применение графов.

Ключевые понятия и формулы

В тех случаях, когда невозможно дать четкое определение какому-либо предмету или явлению, люди пользуются понятиями. Основные понятия не определяются через другие. Одно из основных понятий современной математики — *множество*.

Символы, используемые для сокращенной записи:

N	Множество натуральных чисел
Z	Множество целых чисел
Q	Множество рациональных чисел
R	Множество действительных чисел
$a \in A$	a является элементом множества A
$a \notin A$	a не является элементом множества A
$\varnothing$	пустое множество
{a, b, c, d}	множество, состоящее из четырех элементов a,b,c,d
{x|P(x)}	множество, состоящее из таких элементов x, для которых истинно утверждение P(x)
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$A \subset B$	A является подмножеством B
A\B	разность множеств A и B

Множество — это совокупность объектов, объединённых между собой по определенному признаку.

Множество натуральных чисел $N = \{1,2,3,\dots\}$.
Множества всех целых чисел $Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$
Множество всех рациональных чисел $Q = \{\frac{m}{n}; n \neq 0; n \in Z, m \in Z\}$
Множество всех действительных чисел R – объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Множество A является ***подмножеством*** B, если каждый элемент A является также элементом B, и в B есть хотя бы один элемент, не принадлежащий A.

Способы задания множеств:

1) Перечислением всех объектов, входящих в множество (в произвольном порядке).
   Например: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} — множество цифр десятичной системы счисления.
2) Описанием характеристических свойств, которыми обладают все элементы этого множества и не обладает ни один предмет, не являющийся его элементом.

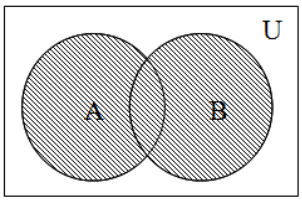
Например: , B = {x| x – натуральное число, меньшее 10}, очевидно, что
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{x | x \in Z;\ -4 < x < 9\}$, которую читают следующим образом: "А есть множество элементов x таких, что x – целое число и оно > – 4 и <9".

Операции над множествами

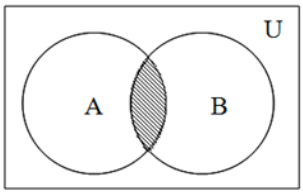
Для наглядного представления операций над множествами применяют язык диаграмм Эйлера-Венна.

Область, представляющую то подмножество, которое нас интересует, отметим штрихами.

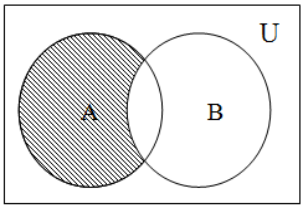
Объединением множеств A и B (обозначение A ∪B) называется множество элементов x таких, что *x* принадлежит хотя бы одному из двух множеств A или B. Символически это можно записать следующим образом:
A ∪B = {*x*|*x* ∈A или x ∈ B}.



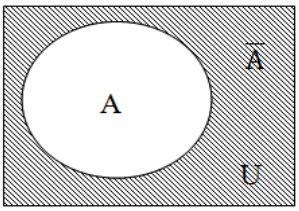
Пересечением множеств A и B (обозначение A ∩B) называется множество, состоящее из элементов x, которые принадлежат и множеству A и множеству B:
A ∩B = {x|x ∈ A и x ∈ B}.



Разностью множеств A и B называется множество всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B:
A\B = {x|x ∈ A и x ∉ B}.



Дополнением (до U) множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество $\bar{A} = U \backslash A$, где U - универсальное множество.



Комплексные числа

Во множестве действительных чисел нельзя решить уравнение $x^2 + 1 = 0$. Расширяя действительные числа, введем число $i = \sqrt{-1}$, т.е. $i^2 = -1$. Тогда, уравнение будет иметь решение $x = \pm i$.

Число *i* называется *мнимой единицей* (*i* – начальная буква французского слова imaginaire – «мнимый»).

Введение мнимой единицы позволяет нам извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Например, $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$

Определение. Числа вида $\boldsymbol{z = a + bi}$, где *a* и *b* – действительные числа, i – мнимая единица, называются *комплексными*.

Число ***a*** – *действительная часть* комплексного числа, ***bi*** – *мнимая часть* комплексного числа, ***b*** – *коэффициент при мнимой части*.

Если *a* = 0, то комплексное число *bi* называется *чисто мнимым*.

Если b = 0, то комплексное число $a + bi$ равно a и называется *действительным*.

Если a = 0 и b = 0 одновременно, то комплексное число $0 + 0i = 0$. Итак, мы получили, что действительные числа и чисто мнимые числа представляют собой частные случаи комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называется **алгебраической формой** комплексного числа.

Два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ условились считать **равными** тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a + bi = c + di$, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется **противоположным (сопряженным)** комплексному числу $z = a + bi$. Например, число 3 + 5i сопряжено числу $z = 3 - 5i$, число $-3i = 0 - 3i$ сопряжено числу $3i = 0 + 3i$.

Пусть a – произвольное вещественное число.

Тогда $a = a + 0i = a - 0i = a$, т.е. *любое вещественное число равно своему сопряженному*.

Верно и обратное утверждение: *если комплексное число $z = a + bi$ равно своему сопряженному комплексному числу $z = a - bi$, т.е. $a + bi = a - bi$, то это число вещественное*. Это следует из того, что равенство двух комплексных чисел z и z означает, что $a = a$ и $b = -b = 0$.

Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $\boldsymbol{Z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$.

Таким образом *при сложении двух комплексных чисел надо сложить их действительные части и коэффициенты при мнимой единице*.

В частности, сумма сопряженных комплексных чисел действительное число, равное удвоенному произведению действительной части:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

Примеры.

1) $(2 + i) + (5 + 6i) = (2 + 5) + (1 + 6)i = 7 + 7i$,

2) $(-2 + 3i) + (1 - 8i) = (-2 + 1) + (3 + (-8))i = -1 - 5i$;

Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $\boldsymbol{Z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$.

Примеры.

1) $(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i$;

2) $(3 - 2i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + (-2 - (-2))i = 2 + 0i = 2$

Произведение комплексных чисел

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $\boldsymbol{Z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i}$

В частности, произведение сопряженных комплексных чисел действительное число, равное сумме квадратов действительной части и коэффициента при мнимой части: $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = -bd$$

Примеры.

1) $(-1 + 3i)(2 + 5i) = (-2 - 15) + (-5 + 6)i = -17 + i$

2) $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 13$

3) $5i \cdot 3i = 15i^2 = -15$

Деление комплексных чисел

Частное двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число

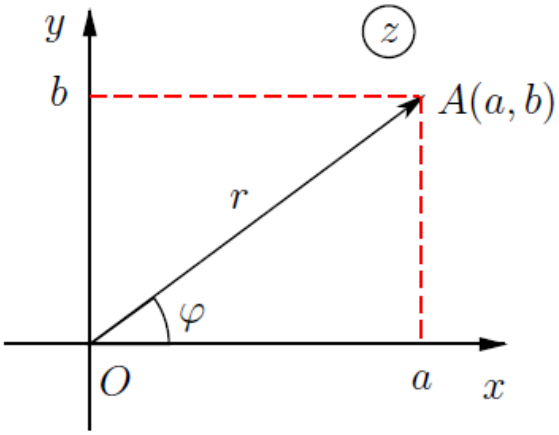
$$\boldsymbol{Z = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} i}$$

Пример.

$$\frac{9 - 7i}{2 - 3i} = \frac{9 \cdot 2 + (-7) \cdot (-3)}{2^2 + (-3)^2} + \frac{2 \cdot (-7) - 9 \cdot (-3)}{2^2 + (-3)^2} i = 3 + i$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

С любой точкой А плоскости *XOY* мы можем связать радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ = и мы можем установить взаимно однозначное соответствие комплексных чисел z = (a,b) с множеством векторов с координатами (a,b) , если все векторы берут начало в точке О с координатами (0,0) .



Геометрическое представление комплексных чисел

Очевидно, что $a = r\,cos\varphi$, $b = r\,sin\varphi$

и тогда $z = a + bi = r(cos\varphi + sin\,\varphi \cdot i)$ есть **тригонометрическая форма** комплексного числа.

Угол φ – аргумент комплексного числа *z* , а $r = |OA|$ - его *модуль*.

$$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \boldsymbol{cos\varphi = \frac{a}{r}} \qquad \boldsymbol{sin\varphi = \frac{b}{r}} \qquad \boldsymbol{tg\varphi = \frac{b}{a}}$$

Пример

Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.

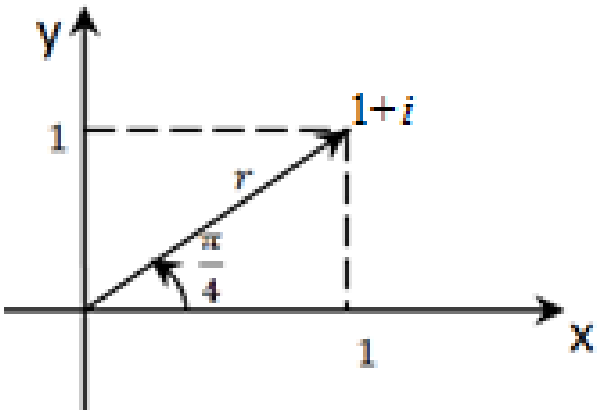
Модуль этого комплексного числа есть $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

тогда

$$sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ откуда $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

Окончательно запишем

$z = 1 + i = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + isin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$, где $k \in Z$



Обычно из бесконечного множества значений аргумента комплексного числа выбирают то, которое заключено между 0 и 2π . В нашем случае таким значением является $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

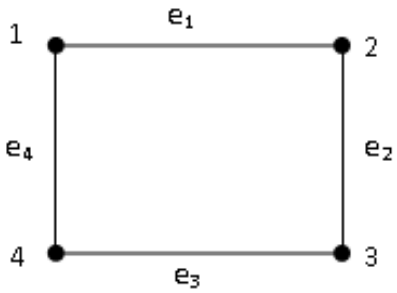
Показательная форма комплексного числа

$cos\varphi$ и $sin\varphi$ связаны формулой *Эйлера*: $\boldsymbol{e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi}$. Так как любое комплексное число можно представить в тригонометрической форме $\boldsymbol{z = r(cos\varphi + sin\,\varphi \cdot i)}$, то, отсюда и из формулы Эйлера следует, что комплексное число можно записать в такой форме: $z = re^{i\varphi}$. Запись комплексного числа в виде $\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$ называется **показательной формой**.

Пример. Представить в показательной форме комплексное $z = -1 + i$

Решение. Находим модуль и аргумент числа: $z = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$, следовательно, показательная форма комплексного числа такова $z = \sqrt{2}e^{i\varphi}$

Основные понятия теории графов.

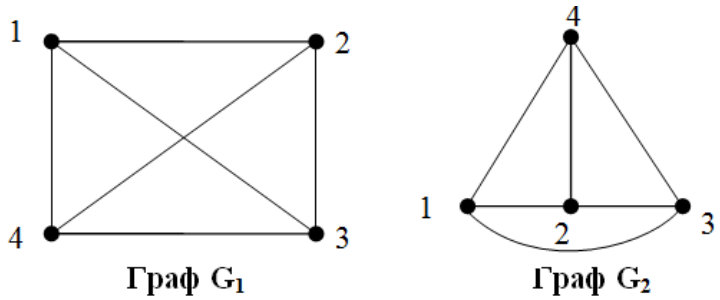


Графические представления – удобный способ иллюстрации различных понятий, отображения исследуемого процесса. Теория графов раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами.

Графом G называется совокупность двух множеств: ***вершин*** и ***ребер***, между элементами которых определено ***отношение инцидентности*** — каждое ребро инцидентно ровно двум вершинам, которые оно соединяет.

Если два ребра инцидентны одной и той же вершине, то они называются смежными.

На рисунке вершины 1 и 2 — смежные, *1* и *3* — нет. Ребра e_1 и e_2 — смежные, а e_1 и e_3 — нет.



Любое конечное множество точек (вершин), некоторые из которых попарно соединены стрелками, можно рассматривать как граф.

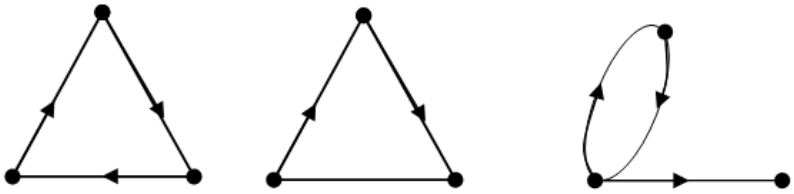
Несущественными являются геометрические свойства ребра (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости. На рисунке приведены одинаковые графы $G_1=G_2$

Графы G_1 и G_2 называются равными ($G_1=G_2$), если множества их вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают.

Граф называется ***правильным***, если его ребра не имеют общих точек, отличных от вершин графа. На рисунке правильный граф G_2, граф G_1 — неправильный, так как ребра, соединяющие вершины 1, 3 и 2, 4 имеют общую точку, которая не является вершиной графа (точка пересечения диагоналей прямоугольника).

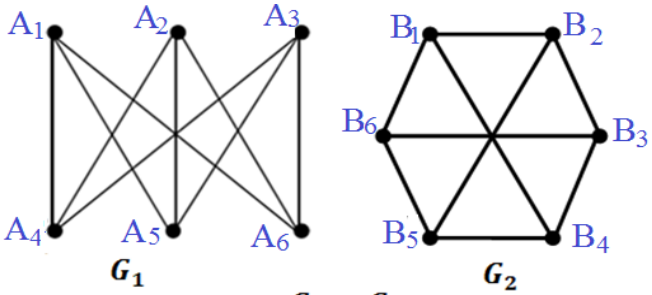
Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии являются ребрами), называется ***неориентированным***; граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами) называется ***ориентированным*** (или направленным).

На рисунке представлены примеры графов с тремя вершинами и тремя дугами.



Граф называется ***конечным***, если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и ***пустым***, если множество его вершин, а значит, и ребер пусто.

Граф G является полностью заданным, если нумерация его вершин и ребер зафиксирована. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются ***изоморфными***.



$G_1 \cong G_2$

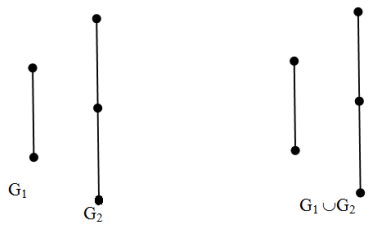
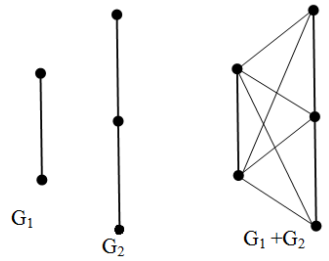
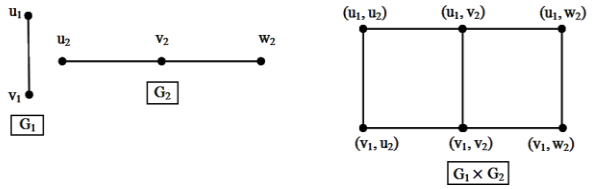
Локальной ***степенью*** $\rho(V)$ (или просто степенью) вершины графа G называют количество ребер, инцидентных вершине *V*.

Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку

Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер:

$$\sum_{V \in G} \rho(V) = 2q$$

Операции над графами

Объединение графов $G_1 \cup G_2$ называют граф, множество вершин которого являются $V = V_1 \cup V_2$, а множеством ребер – $E = E_1 \cup E_2$	
Соединение графов $G_1 + G_2$ состоит из $G_1 \cup G_2$ и всех ребер, соединяющих V_1 *и* V_2.	
Произведением графов $G_1 \times G_2$ называется граф, вершины которого u=(u_1,u_2) и v=(v_1,u_2) смежны тогда и только тогда, когда [u_1=v_1 и u_2, v_2 – смежные вершины] или [u_2=v_2 и u_1, v_1 – смежные вершины].	

Пример 1. Даны множества $A = \{x | x \in N;\ 5 < x < 9\}$, $B = \{3,4,6,8,9\}$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A$

Решение: множество А задано описанием характеристических свойств, которыми обладают элементы. Запись $A = \{x | x \in N;\ 5 < x < 9\}$ читается: «А – множество натуральных чисел из промежутка от 5 до 9», т.е. $A = \{6,7,8\}$

$A \cup B$ - множество, стоящее из всех элементов множеств А и В, т.е.

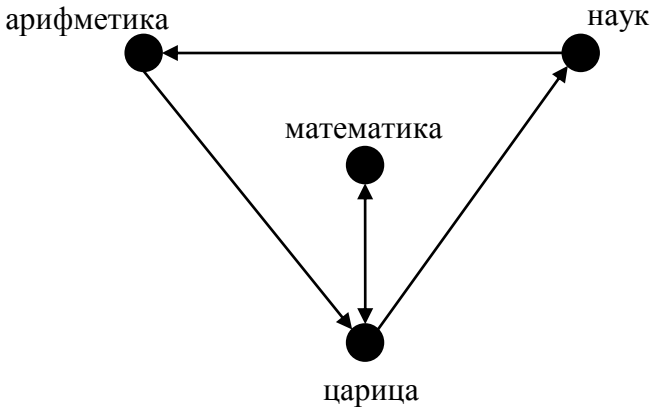
$A \cup B = \{3,4,6,7,8,9\}$.

$A \cap B$ – множество, состоящее из общих элементов множеств А и В, т.е. $A \cap B = \{6,8\}$

$A \backslash B$ – множество, содержащее элементы из множества А за исключением элементов, принадлежащих также и множеству В, т.е. $A \backslash B = \{7\}$

$B \backslash A$ – множество, содержащее элементы из множества В за исключением элементов, принадлежащих также и множеству А, т.е. $B \backslash A = \{3,4,9\}$

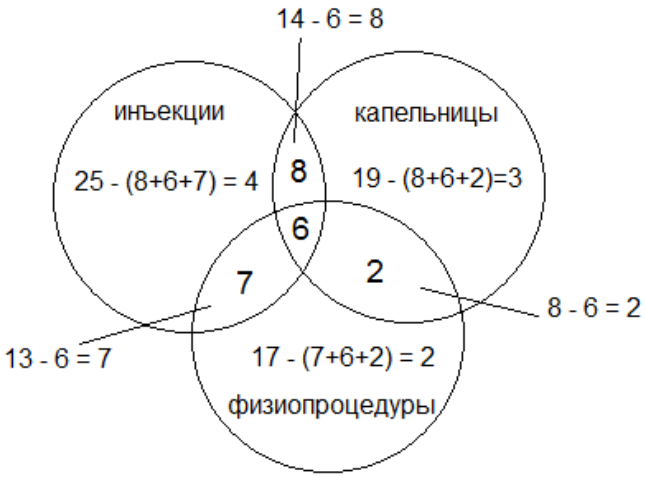
Пример 2. Используя граф, прочитайте высказывание К. Ф. Гаусса.



Следуя по ребрам ориентированного графа, составляется высказывание: «Математика – царица наук, арифметика – царица математики».

Пример 3. В отделении дневного стационара проходят лечение 35 человек. Инъекции назначены 25 пациентам, капельницы – 19 пациентам, физиопроцедуры – 17 пациентам. 6 человек посещают все процедуры, на уколы и капельницы ходят 14 человек, на уколы и физиопроцедуры – 13, на капельницы и физиопроцедуры – 8 человек. Сколько человек не посещают перечисленные лечебные процедуры?

Решение: решим задачу с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Изобразим процедуры кругами.



1. В пересечении всех трех кругов поставим – 6, т.к. по условию задачи все процедуры посещают 6 человек.
2. Далее рассчитаем, скольким пациентам назначены только инъекции и капельницы: $14 - 6 = 8$, аналогично получаем количество пациентов, которым назначены только капельницы и физиопроцедуры $(8 - 6 = 2)$, инъекции и физиопроцедуры $(13 - 6 = 7)$.
3. Рассчитаем, скольким пациентам назначены только инъекции: $25 - (8 + 6 + 7) = 4$. Только капельницы: $19 - (8 + 6 + 2) = 3$. Только физиопроцедуры: $17 - (7 + 6 + 2) = 2$.
4. Рассчитаем, сколько человек не посещают указанные процедуры:

$$35 - (4 + 8 + 3 + 6 + 7 + 2 + 2) = 35 - 32 = 3$$

Ответ: 3 человека не посещают указанные процедуры

Проверь себя

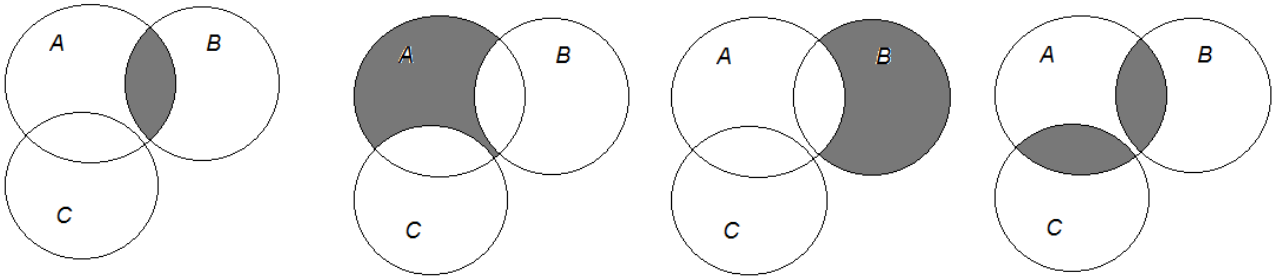
1. Среди перечисленных множеств укажите пустое
   1) $A = \{x | x \in R;\ -4 < x < 1\}$,
   2) $B = \{x | x \in N;\ -4 < x < 1\}$,

3) $C = \{x|x \in Q;\ -4 < x < 1\}$,

4) $D = \{x|x \in Z;\ -4 < x < 1\}$.

2. Установите соответствие

1) 2) 3) 4)



а) $A \backslash (B \cup C)$

б) $A \cap B$

в) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

г) $B \backslash A$

3. Сумма комплексных чисел $(-2 + 3i) + (1 - 3i) =$

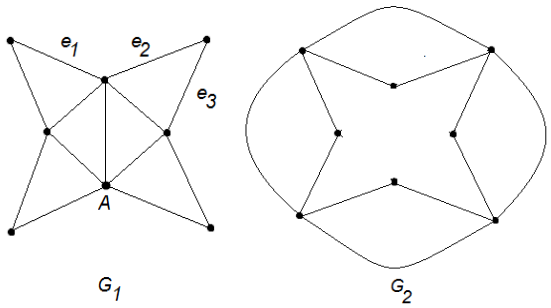
1) -1

2) $3 - 6i$ 1

3) $-1 + 3i$

4) $-1 + 6i$

4. Выберите истинные утверждения



1) каждое ребро графа G_1 инцидентно двум вершинам;

2) граф G_1 ориентирован;

3) ребра e_1 и e_3 графа G_1 смежные;

4) степень вершины А графа G_1 равна 5

5) графы G_1 и G_2 изоморфны

6) граф G_1 правильный

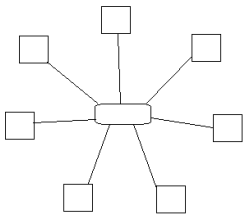
5. Изобразите граф, отображающий топологию «звезда» соединения 7 компьютеров и 1 концентратора в компьютерной сети.

6. Изобразите граф, представляющий коллектив из руководителя, заместителей: по лечебной работе, методической работе, хозяйственной части. В ве-

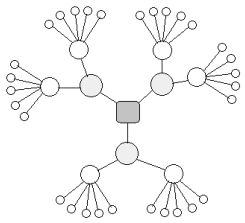
домстве каждого заместителя по 2 ответственных лица, которые в свою очередь, руководят работой 5 человек.

Эталон ответов:

1. 2
2. 1-б, 2-а, 3-г, 4-в
3. 1.
4. 1,4,6
5.



6.



Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. С чем связывают в обычном смысле слово “множество”?
2. Из чего состоит множество?
3. Как обозначают множества, элементы множества?
4. Что называют пустым множеством?
5. Перечислите способы задания множеств.
6. Расскажите об отношениях между множествами. Приведите примеры.
7. Расскажите об операциях, которые можно осуществлять между двумя множествами. Приведите примеры.
8. Что такое комплексное число?
9. Перечислите формы записи комплексного числа.
10. Операции над комплексными числами.
11. Как для наглядности изображаются множества и логические рассуждения?
12. Составьте 3 задачи и решите их, используя элементы теории множеств и графов.
13. Выполните задания:
    1) Верны ли утверждения для множеств A={1,3,4} и B={1,2,3,4,5,8}:
        а) $A \in B$
        б) $A \subset B$
        в) $A \backslash B = \emptyset$
        г) $A \cup B = \{1,3,4,5,8\}$
        д) $A \cap B = \{1,3,4\}$
        е) $(A \backslash B) \subset (B \backslash A)$
        ж) $\{x | x - 2 = 0\} \subset B$

2) Вычислите:
   а) $(-9-4i)+(-2-3i)$
   б) $(2+i)-(9-i)$
   в) $(2+3i)(6-5i)$
   г) $\frac{2i+1}{3-i}$
3) Изобразите ориентированный граф, состоящий из 5 вершин, одна из которых имеет степень 4.
4) Изобразите генеалогическое дерево в виде графа.

Эталон ответов:

1.

а) нет
б) да
в) да
г) нет
д) да
е) да
ж) да

2. а) $-11-7i$, б) $-7+2i$, в) $27+8i$, г) $0{,}1+0{,}7i$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»
9-10 баллов «4»
6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

8.1. Нарисуйте диаграмму, показывающую взаимосвязь множеств натуральных, целых, рациональных, действительных чисел между собой

8.2. Расположите заданные множества в порядке возрастания количества их элементов.

а) множество целых чисел

б) пустое множество

в) $\{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13\}$

г) $\{x \in N | 40 \leq x \leq 44\}$

8.3. Найдите все элементы множеств:

а) $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{Q} \mid 2\mathrm{x} = 3\}$

б) $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{N} \mid x - 3 < 5\}$

в) $\mathrm{C} = \{x \in \mathrm{Q} \mid 4\mathrm{x} = 12\}$

г) $\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{N} \mid \mathrm{x} + 2 < 1\}$

д) $\mathrm{E} = \{x \in Z |\ 2x^2 + 5x + 2 = 0\}$

е) $F = \{x \in Q |\ 2x^2 + 5x + 2 = 0\}$

8.4. Составьте список элементов множеств, заданных посредством характеристического признака:

а) $\mathrm{X} = \{\mathrm{x} \mid x^2 - 2x - 15 = 0\}$;

б) $\mathrm{X} = \{\mathrm{x} \mid x^2 + 2x + 15 = 0\}$;

в) $\mathrm{X} = \{\mathrm{x} \mid x \in N, -5 < x \leq 4\}$

8.5. Равны ли множества $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$; $\mathrm{B} = \{x | x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}$.

8.6. Найдите все подмножества множества $A = \{3;\ 4;\ 5\}$

8.7. Даны множества A и B. A — множество четных положительных чисел, B – множество нечетных положительных чисел. Определите $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

8.8. $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 5\}$. Определить $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}, \mathrm{B} \backslash \mathrm{A}$.

8.9. Выбрать верное утверждение о числовых множествах

а) интервал $(-4;\ 0)$ является подмножеством отрезка $[-3;\ -1]$

б) множество рациональных чисел является подмножеством иррациональных

в) отрезок $[1;\ 12]$ является подмножеством интервала $(-1;\ 10)$

г) множество целых чисел является подмножеством действительных

8.10. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным

а) Множество иррациональных чисел является подмножеством множества целых чисел.

б) Промежуток $(-\ 14;\ 3]$ является подмножеством отрезка $[-\ 15;\ 0]$.

в) Интервал $(-\ 12;\ 13)$ является подмножеством отрезка $[-\ 13;\ 15]$.

г) Множество действительных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел.

8.11. Даны множества: $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, f, h\}$. Найдите объединение, разность, пересечение множеств А и В.

8.12. Даны множества $A = \{-18, -13, -8, 8, 12\}$ и $B = \{-13, 1, 6, 8, 15\}$. Найдите объединение, разность, пересечение множеств А и В.

8.13. Даны множества: $A = \{5;\ 10;\ 15;\ 20\}$ $B = \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15\}$. Найдите объединение, разность, пересечение множеств А и В.

8.14. Даны множества $A = \{50, 51, 52, 53, 55\}$ и $B = \{5, 15, 51, 55\}$. Найдите объединение, разность, пересечение множеств А и В.

8.15. Найдите $A \cap B$

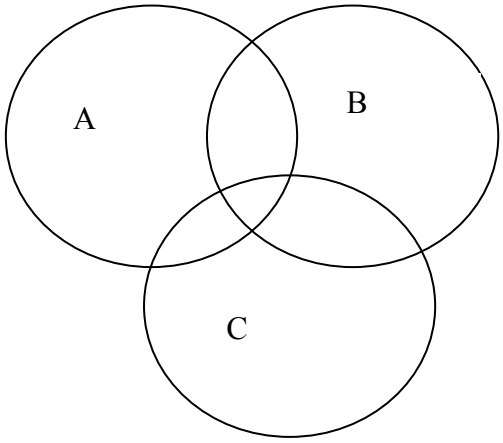
а) $A = \{3;\ 4;\ 5\}$, $B = \{3;\ 5;\ 6\}$

б) $A = \{0;\ 1;\ 7;\ 8\}, B = \{-7;\ 0;\ 6;\ 9\}$

в) А= {1; 3; 5; 7}, В= {2; 4; 6; 8}

г) А= {1; 2; 3}, В= {-1; 0; 1; 2; 3}

8.16. Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:



а) $A \backslash (B \cup C)$;

б) $(A \backslash B) \cap (C \backslash B)$;

в) $(C \backslash A) \cup (C \backslash B)$;

г) $(C \backslash A) \cap (C \backslash B)$;

д) $(C \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

е) $(A \cup B) \backslash C$

8.17. Решите уравнения:

а) $2z^2 + 3z + 3 = 0$

б) $5z^2 + 6z + 5 = 0$

8.18. Вычислите

а. $(2+3i)+(5+i)$

б. $(5+7i)+(2-6i)$

в. $(-4i)+9$

г. $(6-4i)+(-15-2i)$

д. $(7+2i)-(7+3i)$

е. $(3+5i)-(3-5i)$

ж) $(6i)-(6)$

з) $(1+i)(1+i)$

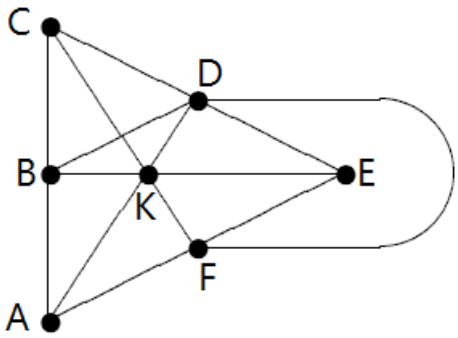
и) $(2-3i)(1-i)$

к) $-2i\cdot 3i$

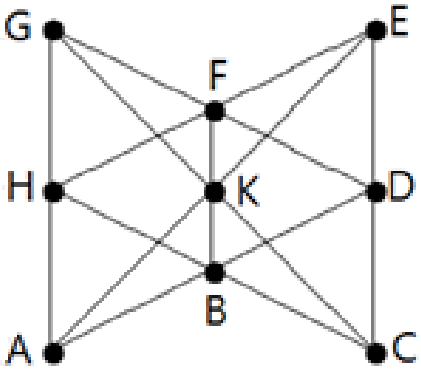
л) $\dfrac{9-2i}{2+9i}$

м) $\dfrac{i-1}{4-5i}$

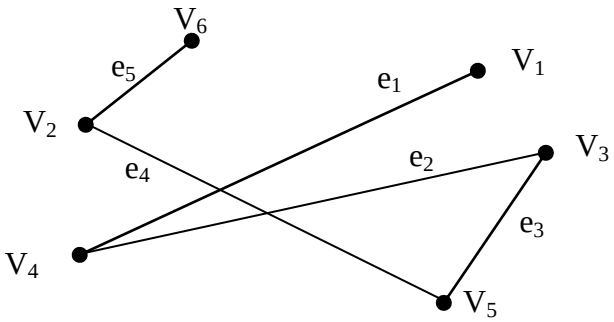
8.19. Чему равна степень каждой вершины графа?



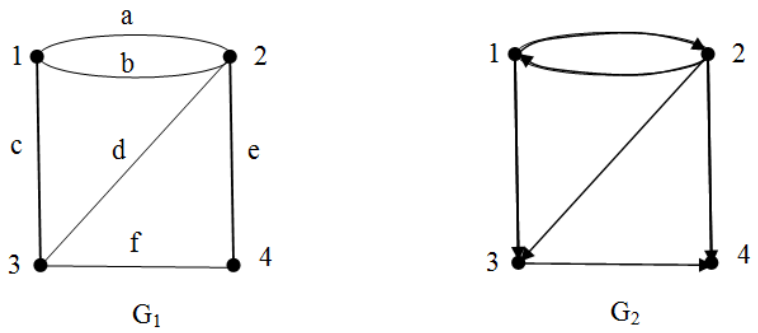
8.20. Чему равна степень каждой вершины графа?



8.21. Задан граф, представленный на рисунке. Запишите множества именованных вершин V, поименованных ребер E и пар инцидентных вершин P.



8.22. Определить степени вершин графов, изображенных на рисунке:



8.23. Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причем каждый мальчик подарил каждому из своих друзей по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?

8.24. В отделении стационара работает 5 медсестер. Нужно составить график дежурств по 2 человека на смену, причем каждая медсестра должна отдежурить с каждой из остальных. На сколько смен будет составлен график?

8.25. Встретились 6 студентов. Каждый, здороваясь, пожал каждому руку. Сколько всего рукопожатий было сделано?

8.26. Несколько мальчиков встретились на вокзале, чтобы поехать за город в лес. При встрече все они поздоровались друг с другом за руку. Сколько мальчиков поехало за город, если всего было10 рукопожатий?

8.27. Иван не Иванов, Петр не Петров, Сергей не Сергеев. Сергей живет в одном доме с Петровым.

8.28. Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, черная, красная, синяя, зеленая. Черная едет впереди синей, зеленая — впереди белой, но позади синей, красная — впереди черной. Каков порядок их движения?

II уровень

8.29. Заполните таблицу

Множества	A∪B	A∩B	A\B	B\A
$A = \{1;\ 3;\ 4;\ 8;\ 9\}, B = \{2;\ 4;\ 8;\ 10\}$				
$A = \{x \in N \mid x < 7\}, B = \{1;\ 3;\ 5;\ 9\}$				

$A = \{x \mid x^2 = 4\}, B = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$				

8.30. Задайте множество:

а) четных натуральных чисел;

б) нечетных чисел;

в) корней уравнения $x^2 + 5 = 0$;

г) натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 4$;

8.31. Рассмотрим множество всех натуральных чисел N и три множества $A = \{1, 2\}$, $B = N \backslash A$, $C = \{A, B\}$. Справедливо ли высказывание $1 \in C$?

8.32. X = {1, 2, 3}, Y = {1, 2}, Z = {1, 2, 3,{1, 2 }}.Определить, какие из приведенных ниже утверждений справедливы, а какие – нет:

а) $1 \in X$,
б) $1 \subset X$,
в) $Y \in X$,
г) $Y \subset X$,
д) $Y \in Z$,
е) $Y \subset Z$.

8.33. Определить, какие из приведенных утверждений справедливы, а какие нет:

а) $\varnothing \in \varnothing$,
б) $\varnothing \subset \varnothing$,
в) $\varnothing \in \{\varnothing\}$,
г) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$.

8.34. Дано универсальное множество U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и в нем подмножества $A = \{x \mid x < 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 6\}$. Найдите $A \cup B$ (Указать правильные варианты ответов).

а) $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6\}$
б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
в) $\{x \mid x < 7, x \in U\}$
г) $\{1, 3\}$
д) $\{3, 4, 2, 5, 1, 6\}$

8.35. Дано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и в нем подмножества $A = \{x \mid x < 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}, C = \{1, 2, 5, 6\}$. Найдите $C \cup A$ (Указать правильные варианты ответов).

а) $\{1, 1, 2, 2, 3, 5, 6\}$
б) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$
в) $\{x \mid x < 7\}$
г) $\{3, 2, 6, 1, 5\}$
д) $\{1, 2\}$

8.36. Дано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и в нем подмножества $A = \{x \mid x > 4\}, B = \{3, 5, 7\}, C = \{1, 2, 4, 6\}$. Найдите $C \cup B$ (Указать правильные варианты ответов).

а) U
б) {3, 5, 7}
в) $\varnothing$
г) {3, 5, 7, 1, 2, 4, 6}

д) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

8.37. Дано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и в нем подмножества $A = \{x|\ x < 5\}, B = \{2, 4, 5, 6\}, C = \{1, 3, 5, 6\}$. Найдите $C \cap B$ (Указать правильные варианты ответов).

а) $\{1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6\}$

б) $\{6, 5\}$

в) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

г) $\{x|\ x < 7\}$

д) $\{5, 6\}$

8.38. Будет ли верно утверждение, что $-10 \in A \cap B$, где $A = \left\{x \middle| x + \frac{1}{1-x} < 3\right.$; $B = x - 2x + 4 > 5$

8.39. Будет ли верно утверждение $(x, y) \in A \cup B$, где $x = -2, y = 15$, $A = \left\{(x, y) \middle| x^2 + 3y < \sqrt{x}\right\}$; $B = \{(x, y)|x + y > 5\}$

Найдите значения выражений в алгебраической форме.

8.40. $(1 + 2i)i - \frac{3+2i}{1-i}$

8.41. $\frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}$

8.42. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

8.43. $\frac{3-2i}{1+i} - \frac{4+5i}{-2i}$

8.44. $z = \left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$

8.45. $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$.

8.46. $z = \frac{(3+2i)^2}{(1-2i)^3}$

Запишите данные комплексные числа в тригонометрической и показательной форме, определив их модули и аргументы

8.47. $z = \sqrt{3} - i$

8.48. $z = i$

8.49. $z = 3$

8.50. $z = -3$

8.51. $z = 1 - i$.

8.52. $z = -1 - \sqrt{3}i$.

8.53. $z = -2\sqrt{3} + 2i$

8.54. $z = 1 - 7i$

8.55. Сколько натуральных чисел из первого десятка не делится ни на 2, ни на 3?

8.56. Из 100 первокурсников колледжа посещают кружок педиатрии 30 человек, кружок хирургии – 28, кружок основ сестринского дела – 42. Кружки педиатрии и хирургии посещают 8 человек, кружки хирургии и основ сестринского дела – 10, кружки педиатрии и основ сестринского

дела – 5, а все три – 3 человека. Сколько студентов не посещают ни один кружок?

8.57. В ЛПУ работают 36 человек. Из них на стажировке в Германии побывали 18 человек, во Франции – 14 человек, в Италии – 10 человек. Кроме того, известно, что все три страны посетили 2 человека, Германию и Францию – 8, Германию и Италию – 5, Францию и Италию – 3. Сколько сотрудников не прошли стажировку зарубежом?

8.58. В группе учатся 40 студентов. Из них по русскому языку имеют «пятерки» 19 человек, по математике – 17 человек и по информатике – 22 человека. Только по одному предмету имеют «пятерки»: по русскому языку – 4 человека, по математике – 4 человека, по информатике – 11 человек. Семь студентов имеют «пятерки» и по математике и по информатике, а 5 студентов – «пятерки» по всем предметам. Сколько человек учится без «пятерок»? Сколько человек имеют «пятерки» по двум из трех предметов?

III уровень

8.59. Сколько подмножеств у множества, состоящего из:

а) одного элемента;

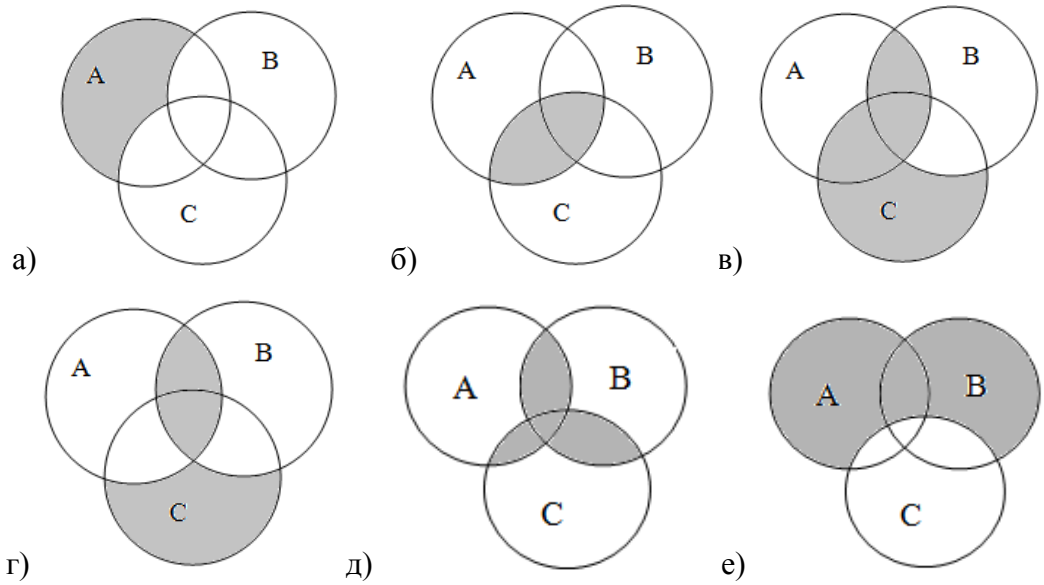
б) двух элементов;

в) трех элементов;

г) из пяти элементов;

д) из десяти элементов.

8.60. Запишите множество, изображенное с помощью кругов Эйлера на рисунке:



8.61. Найдите значения выражений в алгебраической форме. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 2x^2 - yi - 1 - \frac{3}{i}$ и $z_2 = y - 3 + x^2 i - 2i$ будут равными?

8.62. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = x - \frac{y^2}{i} - 4 + 5i$ и $z_2 = y^2 + 1 - 3xi$ будут противоположными?

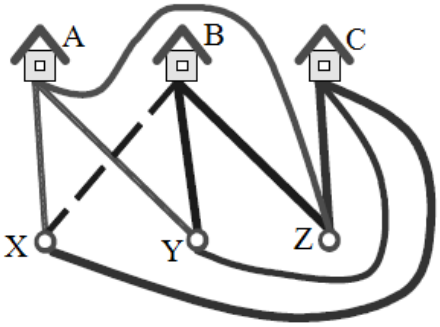
8.63. Доказать, что: а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

8.64. Доказать, что: а) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

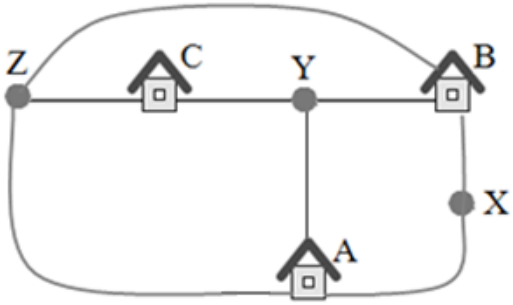
8.65. Расположите на плоскости девять прямых и девять точек так, чтобы через каждую точку проходили ровно 3 прямые и на каждой прямой лежали ровно 3 точки.

8.66. В компании, состоящей из 5 человек, среди любых трех человек найдутся двое, которые знают друг друга, и двое, незнакомых друг с другом. Доказать, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

8.67. *Задача о трех домах и трех колодцах*. На участке земли были построены три дома A, B, C и вырыты три колодца X, Y, Z. От каждого из домов имелась тропа к каждому из колодцев. Спустя некоторое время обитатели этих домов поссорились друг с другом и решили проложить дорожки к колодцам так, чтобы по пути к колодцам им не приходилось встречаться друг с другом. Можно ли это сделать?



(рис.1)



(рис. 2)

9. Теория вероятностей. Решение комбинаторных задач

Актуальность темы

Теория вероятностей, как научная дисциплина занимается изучением закономерностей в случайных явлениях. Она изучает модели экспериментов, результат которых нельзя предсказать определенно. Предметом изучения теории вероятностей может быть, например, распространение эпидемий в регионах, погода на завтрашний день, доля отбракованных лекарств при их массовом производстве, прогнозирование результатов лечения, курса акций при устойчивом финансовом положении рынка и т.п.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- применять формулы вычисления числа размещений, перестановок, сочетаний;
- применять правила сложения и произведения;
- вычислять вероятность случайного события.

Обучающийся должен знать:

- основные понятия комбинаторики;
- правила сложения и произведения;
- формулы вычисления числа размещений, перестановок, сочетаний;
- понятия случайного явления и события;
- виды случайных событий;
- классическое определение вероятности случайного события.

Ключевые понятия и формулы

Случайное событие – любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Случайное событие – результат испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) – выполнение определенного комплекса условий, в котором наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Примеры случайных событий:

1. выигрыш в лотерее;
2. быть спрошенным на семинаре;

3. в партии деталей имеются бракованные. Случайное событие – извлеченная деталь с браком;
4. заболеть в эпидемию гриппа.

Достоверное событие - событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.

Невозможное событие - событие, которое в результате испытания вообще не может произойти.

Противоположные события A и $\bar{A}$, если непоявление одного из них в результате данного испытания влечет появление другого.

Комбинаторика – математический раздел, изучающий вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Понятия комбинаторики

Факториал

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \qquad \boldsymbol{0! = 1} \qquad \textbf{(9.1)}$$

Количество перестановок из n элементов

$$\boldsymbol{P_n = n!} \qquad \textbf{(9.2)}$$

Количество размещений из n элементов по k

$$\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}} \qquad \textbf{(9.3)}$$

$$A_n^0 = A_0^0 = 1$$

$$A_n^n = P_n = n!$$

Количество сочетаний из n элементов по k

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \qquad \textbf{(9.4)}$$

$$C_n^0 = 1, \qquad C_n^1 = n$$

Правила комбинаторики

Если элемент X можно выбрать n способами, а после каждого выбора элемента X элемент Y можно выбрать m способами, тогда элементы ***(и X и Y)*** можно выбрать $(\boldsymbol{m \cdot n})$ способами, элемент ***(или X или Y)*** можно выбрать ***(m+n)*** способами.

Вероятность случайного события A:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}} \qquad \textbf{(9.5)}$$

где m – число случаев, благоприятствующих событию A, n – общее число случаев.

Вероятность суммы **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B)} \qquad \textbf{(9.6)}$$

Вероятность суммы **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)} \qquad \textbf{(9.7)}$$

Условной вероятностью $\boldsymbol{P_A(B) = P(B|A)}$ (два обозначения) называют вероятность события *B*, вычисленную в предположении, что событие *A* уже наступило.

Вероятность ***совместного появления двух зависимых событий*** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$\boldsymbol{P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)} \qquad \textbf{(9.8)}$$

Пример 1. Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке?
Решение. Т.к. при расстановке учитывается только порядок, воспользуемся понятием перестановки

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Ответ: 120 способов
Пример 2. Сколько трехзначных чисел с различными цифрами в разрядах существует?
Решение: Следует подсчитать количество чисел с различными цифрами в разрядах таких, например, как 123, 356, 724 …
Первую цифру (сотни) можно выбрать 9 способами (1,2,3,…9), 0 исключается, вторую цифру (десятки) можно выбрать также 9 способами (исключается цифра, задействованная в сотнях, но возможно использовать 0)
третью цифру (единицы) можно выбрать 8 способами (исключаются цифры, задействованные в сотнях и десятках). Поскольку выбираются И сотни И десятки И единицы, применимо правило произведения: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$
Ответ: 648 чисел с различными цифрами в разрядах.

Пример 3
При врачебном обследовании 500 человек у 5 из них обнаружили опухоль в легких.
Определите относительную частоту и вероятность этого заболевания.
Решение: по условию задачи m = 5, n = 500, относительная частота

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{500} = 0{,}01$$

поскольку *n* достаточно велико, можно с хорошей точностью считать, что вероятность наличия опухоли в легких равна относительной частоте этого события:
P(A)= 0,01 = 1%.
Ответ: 1%

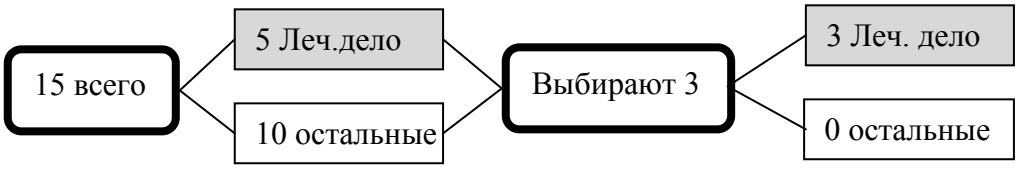
Пример 4. В группе студентов 5 человек с отделения «Лечебное дело», 4 человека – с «Сестринского дела», 3 – с «Фармации», 2 – с «Лабораторной диагностики», 1 – с «Ортопедической стоматологии». Случайным образом выбраны 3 человека. Какое из событий наиболее вероятно:

а) все трое с отделения «Лечебное дело» или с «Сестринского дела»,
б) 1 человек с «Фармации» и 2 – с «Сестринского дела»;
в) по одному человеку с «Фармации», «Лабораторной диагностики» и «Ортопедической стоматологии».

Решение:

а) из общего числа студентов $(5+4+3+2+1=15)$ выбираются трое. По условию они должны быть ИЛИ с отделения «Лечебное дело» ИЛИ «Сестринское дело».

Расчитаем сначала, какова вероятность того, что все трое студентов с отделения «Лечебное дело» (пусть это событие А). Для наглядного представления решения задачи составим схему:



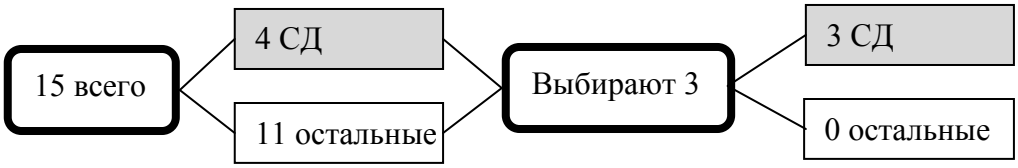
Для вычисления вероятности воспользуемся формулой $P(A)=\frac{m}{n}$

$n=C_{15}^{3}=\frac{15!}{3!12!}=\frac{13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3}=455$ – столько способов существует выбора 3-х студентов из 15.

$m=C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{4\cdot5}{1\cdot2}=10$ – столько способов существует выбора 3 студентов из 5 с отделения «Лечебное дело»

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{455}=\frac{2}{91}$$

Теперь расчитаем вероятность события, что все выбранные студенты с отделения «СД» (пусть это событие В)



$n=C_{15}^{3}=\frac{15!}{3!12!}=\frac{13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3}=455$ – столько существует способов выбора 3-х студентов из 15.

$m=C_{4}^{3}=\frac{4!}{3!1!}=4$ – столько существует способов выбора 3-х студентов из 4-х с отделения «Сестринское дело»

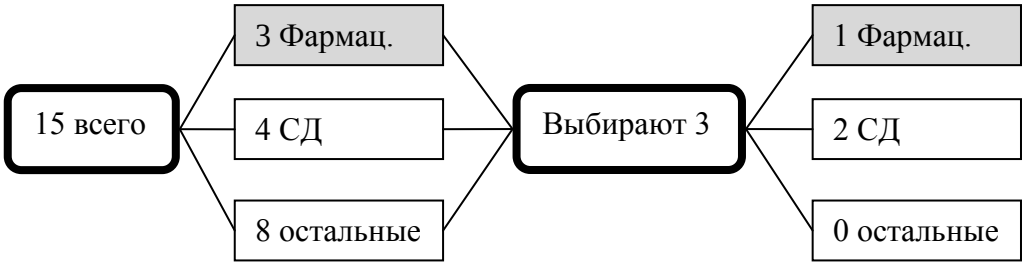
$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{4}{455}$$

События А и В – несовместны, поэтому

$P(A\ или\ B)=P(A)+P(B)=\frac{10}{455}+\frac{4}{455}=\frac{14}{455}$

Ответ: $P(A\ или\ B)=\frac{14}{455}$

б) Пусть событие С – из трех выбранных студентов 1 с отделения Фармация И 2-х с отделения «Сестринское дело»

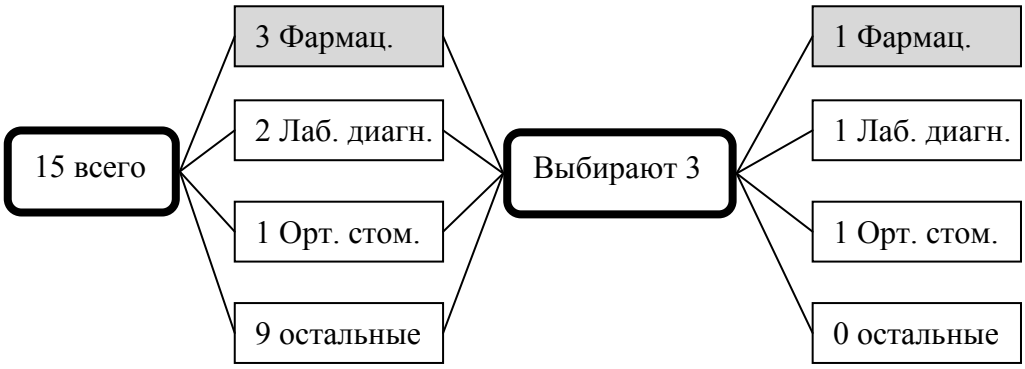


$n = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ – столько существует способов выбора 3-х студентов из 15.

$m = C_{3}^{1} \cdot C_{4}^{2} = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 18$ – столько существует способов выбора 1 студента из 3-х с отделения «Фармация» **И** 2-х студентов из 4-х с отделения «Сестринское дело»

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{18}{455}$$

в) Пусть событие D – заключается в выборе по одному студенту с отделений «Фармация», «Лабораторной диагностики», «Ортопедической стоматологии»



$n = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ – столько существует способов выбора 3-х студентов из 15.

$m = C_{3}^{1} \cdot C_{2}^{1} \cdot C_{1}^{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ – столько существует способов выбора 1 студента из 3-х с отделения «Фармация» **И** 1 студента из 2 с отделения «Лабораторная диагностика» **И** 1 студента с отделения «Ортопедическая стоматология»

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{6}{455}$$

Сравним вероятности: $P(D) < P(A \text{ или } B) < P(C)$

Ответ: наиболее вероятно событие, что среди выбранных 3-х студентов будет 1 человек с отделения «Фармация» и 2 человека с отделения «Сестринское дело».

Проверь себя

1. Случайным событием является
   1) Выигрыш по лотерейному билету
   2) Выпадение двух очков при подбрасывании игральной кости

3) Вытаскивание игральной карты из колоды

4) Подбрасывание монеты

2. Рассмотрим испытание: подбрасывается игральная кость. Установите соответствие:

1)	Достоверное событие	а)	Выпало 3 очка
2)	Невозможное событие	б)	Выпало больше 6 очков
3)	Случайное событие	в)	Выпало меньше 6 очков
		г)	Выпало четное число очков

3. Расположите события в порядке возрастания их вероятностей:

   1) При подбрасывании двух монет два раза выпал герб

   2) При подбрасывании игральной кости выпало число очков, большее четырех

   3) Из колоды в 36 карт наугад достали туза

   4) Из урны, содержащей пять белых шаров, наугад достали черный шар

   5) При подбрасывании игральной кости выпало четное число очков

4. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,9 и 0,4 соответственно. Вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна …

   1) 0,5

   2) 0,4

   3) 0,45

   4) 0,36

5. Если известно, что $P(A) = 0,65$, то вероятность противоположного события $P(\overline{A})$ равна

   1) 0,65

   2) 0,5

   3) 0,35

   4) -0,65

Эталон ответов:

1 – 2); **2** – 1)-в, 2)-б, 3)-а, г; **3** – 4), 3), 1), 2),5); **4** – 4); **5** – 3)

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Комбинаторика. Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания.
2. Формулы для вычисления числа размещений, перестановок, сочетаний.
3. Понятие случайного события.
4. Виды случайных событий.
5. Классическое определение вероятности.
6. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
7. Решите задачи:

   1) Вычислите: а) $\frac{6!-5!}{4!}$; б) $\frac{6!}{3!+4!}$; в) $\frac{4!\cdot 6!}{8!}$

   2) Вычислите: $\frac{P_{20}}{P_5\cdot P_{15}}$

   3) Имеются 10 пробирок с различными штаммами бактерий. Для эксперимента необходимо отобрать 4 пробирки. Сколькими способами это можно сделать?

   4) В соревнованиях участвуют 10 человек. Сколько может быть вариантов распределения 3-х призовых мест?

   5) Сколькими способами можно разместить 5 упаковок лекарственных препаратов на витрине?

   6) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 20 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

   7) Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?

Эталон ответов:

1. *а)* 25*; б)* 24*; в)* $\frac{3}{7}$.
2. 15504
3. 210
4. 720
5. 120
6. 190
7. $P(A) = \frac{5}{31}$

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

Критерии оценки

11-12 баллов «5»
9-10 баллов «4»
6-8 баллов «3»

Практические задания

I уровень

9.1. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найдите относительную частоту попаданий в цель.

9.2. Необходимо оценить знания студентов по 20 вопросам программы. Сколько билетов по 3 вопроса можно составить?

9.3. Сколько вариантов существует для выпуска на площадку 6 игроков из имеющихся 10?

9.4. В группе 20 человек. Формируется первая шестерка студентов для сдачи экзамена. Сколькими способами можно составить первую шестерку?

9.5. В розыгрыше кубка страны по футболу принимают участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?

9.6. У одного студента 7 разных книг, у другого – 16. Сколькими способами можно осуществить обмен: а) книгу на книгу; б) 2 книги на 2 книги.

9.7. В шахматном турнире участвуют 12 человек. Сколько всего партий должны сыграть участники турнира, если они каждый из участников встретится с каждым из остальных по 2 раза?

9.8. Сколькими способами можно выбрать 2 ампулы из упаковки, содержащей 10 ампул.

9.9. У 6 мальчиков и 11 девочек имеются признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить наличие заболевания, требуется взять выборочный анализ крови у 2 мальчиков и 2 девочек. Сколькими способами это можно сделать?

9.10. Из 4 первокурсников, 5 второкурсников, 6 третьекурсников надо выбрать 3 студента на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов.

9.11. Найдите число способов распределения студенческой группы из 23 человек на бригады по: а) 3 человека, б) 5 человек.

9.12. Учащиеся изучают 8 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, если в этот день можно поставить три предмета?

9.13. Сколькими способами можно разместить за столом 7 человек?

9.14. Сколькими способами можно зачеркнуть 5 номеров из 36, участвуя в «Спортлото»?

9.15. В конкурсе медсестер участвуют 12 человек. Имеется три призовых места (1, 2, 3 место). Сколько имеется вариантов распределения трех призовых мест.

9.16. Из букв слова «дифференциал» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) «ч»?

9.17. Из шести карточек с буквами И, С, К, Ь, Н, М наугад одну за другой вынимают и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что появится слово а) «НИС»; б) «СИМ»?

9.18. На столе находятся 5 ампул с препаратом А, 10 – с препаратом В и 15 – с препаратом С. Наугад берут 1 ампулу. Какова вероятность, что наугад выбранная ампула окажется а) с препаратом В б) с препаратом В или С

9.19. В студенческой группе 6 юношей и 9 девушек. Какова вероятность, что наугад вызванный студент окажется юношей.

9.20. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них 3 книги по анатомии, 3 – по физиологии и 4 – по фармакологии. Студент случайным образом достает 1 книгу. Какова вероятность того, что он возьмет книгу по анатомии или по фармакологии.

9.21. В коробке находятся 2 упаковки аспирина, 3 – анальгина, 5 - амидопирина. Наугад извлекается 1 упаковка. Найти вероятность того, что ею окажется упаковка аспирина или анальгина.

9.22. В корзине 4 жёлтых и 2 зелёных шаров. Наудачу вынули 2 шара. Найдите вероятность того, что они различные?

9.23. В корзине 6 белых, 4 черных шаров. Наудачу вынули 5 шаров. Какое событие вероятнее: А - вынули только белые шары; В - 2 белых и 3 черных шара.

9.24. Среди 300 пробирок, изготовленных на автоматической линии, оказалось 15 нестандартных. Найдите вероятность появления нестандартных пробирок.

9.25. Вероятность того, что конкурс выиграет участник А, равна $\frac{1}{3}$, а вероятность того, что конкурс выиграет участник В, равна $\frac{1}{5}$. Какова вероятность того, что конкурс выиграет один из них?

9.26. В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки: а) оба белые; б) оба красные; в) разного цвета; г) одного цвета.

9.27. В урне 20 шаров, из которых 7 красных, а остальные белые. Наудачу вынули три шара. Какова вероятность, что все они белые?

9.28. В группе из 18 студентов имеется 5 отличников. Выбираются наудачу три студента. Какова вероятность, что все они отличники?

II уровень

9.29. Количество людей, доживающих до определенного возраста из 10000 родившихся, представлено в таблице

Возраст в годах	Число доживших	Возраст в годах	Число доживших	Возраст в годах	Число доживших
0	100000	35	92232	70	64332
5	96236	40	90809	75	52892
10	95852	45	89109	80	28998
15	95565	50	86895	85	25003
20	95098	55	83551	90	12723
25	94354	60	79179	95	5450
30	93405	65	72661	100	1873

Найдите вероятность того, что человек доживет до 30 лет, до 50 лет, до 80 лет.

9.30. На плоскости даны n точек, расположенные так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Определите, сколько различных прямых можно провести через эти точки.

9.31. Сколькими способами на шахматной доске можно указать: а) 2 клетки б) 2 клетки одного цвета; в) 2 клетки разных цветов.

9.32. Из группы, состоящей из 7 мальчиков и 4 девочек, надо составить команду из 6 человек так, чтобы в них входило не менее двух девочек. Найдите все способы такого составления.

9.33. Для футбольных команд имеются шорты и футболки только трех цветов: белого, синего, красного. Хватит ли комбинаций одеть 8 команд?

9.34. Сколькими способами можно составить график дежурств на одну смену из 1 врача и 2 медсестер отделения стационара, если всего в отделении работают 6 врачей и 10 медсестер?

9.35. Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани различные?

9.36. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных лиц окажется 3 женщины.

9.37. Среди 35 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 7 ламп окажутся исправными?

9.38. Технический контроль из партии в 10 изделий проверяет взятые наудачу 3 изделия Партия не принимается, если среди трех проверяемых изделий окажется хотя бы одно бракованное. Определить вероятность приемки партии, если в ней окажется 4 бракованных изделий.

9.39. Группа туристов, состоящая из 12 юношей и 8 девушек, выбирают по жребию хозяйственную команду из 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся двое юношей и две девушки?

9.40. Из 20 акционерных обществ 4 являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции 6 АО. Какова вероятность, что среди купленных акций 2 окажутся акциями банкротов?

9.41. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников, 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

9.42. Из 12 студентов 3 не прошли профилактический осмотр. Найдите вероятность того, что оба из 2 случайных образом выбранных из этой группы студентов прошли медосмотр.

9.43. В группе студентов, состоящей из 20 человек, 12 юношей и 8 девушек. Для дежурства случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что среди них будет один юноша и одна девушка?

9.44. В ящике имеется 12 деталей, из которых 5 деталей нестандартны. Сборщик наудачу извлекает из ящика 4 детали. Какова вероятность того, что все они будут стандартными?

9.45. В группе из 30 студентов на контрольной оценку «5» получили 8 человек, «4» – 12 человек, «3» – 7 человек. Какова вероятность, что 3 студента, вызванных к доске, имеют по контрольной оценку «4»?

9.46. В ящике 15 деталей, среди которых 4 бракованные. Наудачу извлекли 3 детали. Найдите вероятность того, что среди извлеченных деталей:
а) нет бракованных;
б) нет годных;
в) 2 годные, 1 бракованная.

9.47. Группа студентов из 15 девушек и 5 юношей выбирает представителей в студсовете в составе 4 человек. Какова вероятность, что в этой команде окажутся 2 юноши и 2 девушки?

9.48. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара (событие А)?

9.49. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что все 3 вопроса экзаменационного билета он знает.

9.50. В корзине 10 яблок, из которых 4 зеленых. Наудачу достали 3 яблока. Найдите вероятность того, что хоть одно из выбранных яблок зеленое.

9.51. Студент знает ответы на 20 теоретических вопросов из 30 и может решить 30 задач из 50, предлагаемых на зачете. Найти вероятность того, что студент полностью ответит на билет, который состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи.

9.52. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика наудачу вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

9.53. Имеются два ящика, в первом из которых 5 белых и 8 красных шаров, а во втором – 3 белых и 2 красных шара. Из каждого ящика вынимается

наудачу по одному шару. Какова вероятность того, что один из них будет красным, а другой белым?

9.54. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

9.55. Аптека получила 100 упаковок некоторого лекарственного препарата со склада №1, 200 – со склада №2 и 500 – со склада №3. Какова вероятность того, что очередная проданная упаковка поступила со склада №1 или №2?

9.56. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго – 300, из которых 280 стандартных. Найдите вероятность того, что наудачу взятая пробирка будет стандартной.

9.57. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов 2 будут выигрышными?

9.58. Среди 30 ампул, проверенных на герметичность, оказалось 6 ампул с трещинами. Найдите вероятность того, что среди 20 выбранных ампул а) все будут без трещин; б) 3 ампулы будут с трещинами;

9.59. В коробке находится 8 шприцов по 2 мл, 6 шприцов по 5 мл. Из коробки последовательно без возвращения извлекают 3 шприца. Найдите вероятность того, что все 3 шприца – 5 мл.

9.60. Во время тиража игры Спортлото «6 из 49» определяются 6 «счастливых» номеров. Какова при этом вероятность угадать ровно 3 «счастливых» номера?

9.61. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным, равна 0,15. Проверено три изделия. Какова вероятность того, что два из них бракованные?

9.62. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта равна 0,3. Найдите вероятность того, что из трех проверенных изделий только два будут высшего сорта.

9.63. Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найдите вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

9.64. Первенство по футболу разыгрывают 18 команд, среди которых 2 команды экстра-класса. Для уменьшения общего числа игр команды пу-

тем жеребьевки разбиваются на 2 равные группы. Какова вероятность того, что 2 команды экстра-класса окажутся в разных подгруппах?

9.65. В партии из 1000 стандартных ампул 300 изготовлено на 1 заводе, 250 – на втором, 350 на третьем, 100 на четвертом. Известны такие вероятности 0,75; 0,8; 0,85; 0,7 того, что ампула окажется без дефекта при изготовлении ее на 1,2,3,4 заводах соответственно. Какова вероятность того, что наугад взятая ампула из этой партии без дефекта.

9.66. В больницу поступают в среднем 20% больных с заболеванием А, 30% с В, 50% с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А – 0,8, В – 0,7 и С – 0,9. Больной выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием В.

III уровень

9.67. Решите уравнение $2 \cdot C_{x+2}^{x+1} = A_{x+2}^{3}$, где x – натуральное число.

9.68. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить четыре смешанные пары?

9.69. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

9.70. Аптечный склад получает медикаменты с медицинских предприятий трех городов А, В, С. Вероятность получения медикаментов из города А – P(A)=0,5; из города В – P(B)=0,3. Найдите вероятность P(C) того, что медикаменты получены из города С.

9.71. В группе 12 студентов, среди которых 5 отличников. По списку наудачу выбраны 9 студентов. Найдите вероятность того, что среди отобранных 4 отличника?

9.72. Предположим, что в некоторой семье имеются 2 ребенка. 1) Какова вероятность того, что оба ребенка – девочки? 2) Если известно, что, по крайней мере, один ребенок – девочка, то какова вероятность того, что оба ребенка – девочки? 3) Если известно, что старший ребенок – девочка, то какова вероятность того, что оба ребенка – девочки?

9.73. В картотеке имеются истории болезней 8 пациентов. Если наугад взять первую, затем вторую, третью и т.д. истории болезней, то какова вероятность в каждом случае изъятия нужной истории болезни? Предполагается, что искомая история болезни имеется в картотеке. Рассмотрите 2 варианта: а) взятые истории болезней не возвращаются в картотеку;

б) взятые истории болезней каждый раз возвращаются в картотеку и хаотически располагаются в ней.

9.74. В коробке имеется 7 желтых и несколько белых таблеток. Какова вероятность вытащить белую таблетку, если вероятность вытащить желтую таблетку равна $\frac{1}{6}$? Сколько белых таблеток в коробке?

9.75. При стрельбе по мишени вероятность попадания p=0,75. Найдите число попаданий при 40 выстрелах.

9.76. Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна P_1= 0,7, а второго – P_2=0,8. Найдите вероятность попадания в клетку-«мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

9.77. В некоторую больницу поступают пациенты с четырьмя видами болезней. Многолетние наблюдения показали, что этим группам соответствуют относительные частоты 0,1; 0,4; 0,3; 0,2. Для лечения заболеваний с частотой 0,1 и 0,2 необходимо переливание крови. Какое количество больных следует обеспечить кровью, если в течение месяца в стационар поступило 1000 больных?

9.78. Из 20 человек, одновременно заболевших гриппом, 15 выздоровели полностью за 3 дня. Предположим, что из этих 20 человек случайным образом выбирают 5. Какова вероятность, что за 3 дня из выбранных выздоравливают:

а) 5 человек

б) 4 человека

в) никто не выздоравливает

9.79. В урне находятся 15 шаров, пять из которых красные, а остальные белые. Наудачу друг за другом извлекаются три шара. Какова вероятность того, что все они будут красными?

9.80. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

9.81. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие *A*), при втором — черный (событие *B*) и при третьем—синий (событие C).

9.82. Студент пришел на зачет зная только 30 вопросов из 50. Какова вероятность сдачи зачета, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один?

9.83. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 25 дней без дождя. Какова вероятность того, что 1-го и 2-го сентября дождя не будет?

10. Математическая статистика. Расчет выборочных характеристик

Актуальность темы

Математическая статистика – наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Поиск новых методов диагностики и лечения, выбор наилучшего из уже принятых – везде статистические соображения играют не последнюю роль. Чтобы принять полноправное участие в обсуждении этих вопросов, медицинский работник должен быть знаком с принципами и основными методами статистики.

В результате применения статистического метода мы получаем оценку вероятности того или иного предположения. Кроме того каждый статистический метод основан на собственной математической модели и результат его правильный настолько, насколько эта модель соответствует действительности.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- составить вариационный, выборочный, статистический ряд,
- применять формулы для подсчета выборочных характеристик случайной величины,
- оценивать выборку по подсчитанным характеристикам.

Обучающийся должен знать:

- понятие случайной величины,
- закон распределения случайной величины,
- понятие дискретной случайной величины,
- понятие генеральной и выборочной совокупности, вариационного ряда, статистического распределения, выборочного распределения,
- формулы выборочных характеристик случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации)

Ключевые понятия и формулы

Случайная величина - величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Обозначение случайной величины: X, Y, Z

Значения случайной величины: x_1, x_2, x_3 ... , y_1, y_2, y_3...

Дискретной случайной величиной называют такую величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но **счетное**.

Примеры дискретной случайной величины:

- количество пациентов с диагнозом «грипп»,
- число патронажей на дому в день,
- количество поставщиков лекарственных препаратов в аптеку,
- пульс; рост, вес, артериальное давление….

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Множество возможных значений непрерывной случайной величины **бесконечно и несчетно**. Возникает при измерениях.

Примеры непрерывных случайных величин:

- расстояние между населенными пунктами;
- показатели крови (холестерин, гемоглобин, сахар…).

В дальнейшем будем рассматривать дискретные случайные величины.

Закон распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_k

Таблица задает закон распределения случайной величины X, если выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1 \qquad \textbf{(10.1)}$$

Генеральная статистическая совокупность - совокупность всех исследуемых объектов (бесконечно большая величина)

Выборочная совокупность или ***выборка*** – множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Число наблюдений в совокупности называется ее **объемом**.

N – объем генеральной совокупности.

n – объем выборки.

Варианта x_i – значения случайной величины.

Частота встречаемости n_i — означает, сколько раз встретилось значение x_i.

Вариационный ряд – выборка, представляющая собой неубывающую числовую последовательность.

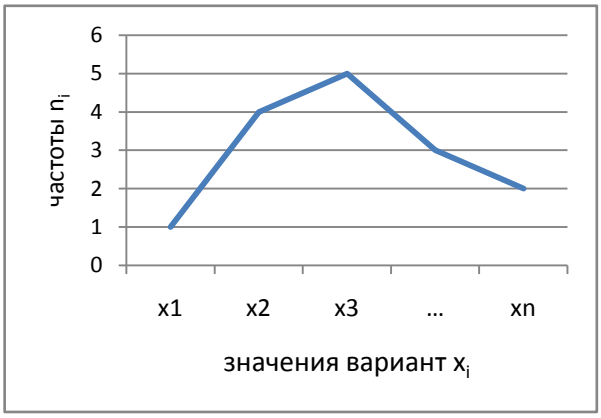
Статистическое распределение (***статистический ряд***)записывают в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

x_i - варианты,

n_i - частота встречаемости варианты x_i

Для графического изображения статистического дискретного ряда на координатной плоскости откладываются точки $(x_i;\ n_i)$ и соединяются отрезками, образуя ломаную – ***полигон частот***.



Выборочное распределение – записывают в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
p_i	$p_1 = \frac{n_1}{n}$	$p_2 = \frac{n_2}{n}$	$p_3 = \frac{n_3}{n}$	…	$p_k = \frac{n_k}{n}$

p_i – относительные частоты встречаемости значения x_i

$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ – объем выборки

Основные числовые характеристики случайной величины

Размах выборки – разность между максимальным и минимальным значением вариант.

Медиана (Me) - это серединная, центральная варианта, делящая вариационный ряд пополам на две равные части.

Например, если число наблюдений составляет 33, медианой будет варианта, занимающая 17-е ранговое место, так как в обе стороны от нее находится по 16 наблюдений.

В ряде с четным числом наблюдений за медиану принимается полусумма в центре находящихся двух величин.

Мода (Мо) – это чаще всего встречающаяся или наиболее часто повторяющаяся величина признака. При приближенном нахождении моды в простом (не сгруппированном) ряде, она определяется как варианта с наибольшим количеством частот.

Математическое ожидание (выборочное среднее) – среднее арифметическое выборки.

Если задано выборочное распределение

$$\bar{X} = M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k \qquad (10.2)$$

Если задано статистическое распределение

$$\bar{X} = M(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n} \qquad (10.3)$$

Практическое применение средних величин

1) для оценки состояния здоровья, например, параметров физического развития (средний рост, средний вес, средний объем жизненной емкости легких и др.), соматических показателей (средний уровень сахара в крови, средний пульс, средняя СОЭ и др.);
2) для оценки организации работы лечебно-профилактических и санитарно-противоэпидемических учреждений, а также деятельности отдельных врачей и других медицинских работников (средняя длительность пребывания больного на койке, среднее число посещений на 1 ч приема в поликлинике и др.);
3) для оценки состояния окружающей среды.

Дисперсия (*«рассеяние»)* **случайной величины** — мера разброса случайной величины, равная математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Чем больше разброс, тем больше дисперсия.

Если случайная величина задана статистическим рядом, то

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n} \qquad (10.4)$$

Если величина задана выборочным распределением, дисперсия рассчитывается по формуле:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = \left[x_1 - M(X)\right]^2 \cdot p_1 + \left[x_2 - M(X)\right]^2 \cdot p_2 + \ldots + \left[x_n - M(X)\right]^2 \cdot p_n$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 \cdot p_i \qquad (10.5)$$

Удобно также воспользоваться формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \text{ где } M(X^2) = \sum x_i^2 \, p_i \qquad (10.6)$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (10.7)$$

При помощи квадратического отклонения можно установить степень типичности средней, пределы рассеяния ряда, пределы колебаний вокруг средней отдельных вариант.

Применение среднего квадратического отклонения дает возможность оценки и сравнения разнообразия нескольких однородных рядов распределения, так как σ - величина именная, выражается абсолютным числом в единицах изучаемой совокупности (см, кг, мг/л и т.д.).

Закон распределения – функция (таблица, график, формула), позволяющая определять вероятность того, что случайная величина X принимает определенное значение x_i или попадает в некоторый интервал.

Нормальный закон распределения

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

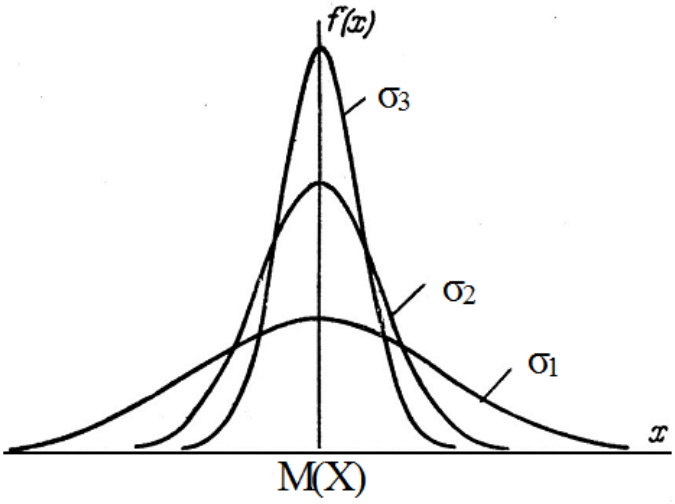


График нормального распределения

Правило трех сигм:

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

В интервале $M \pm 3\sigma$ находится 99,7% всех вариант ряда, в интервале $M \pm 2\sigma$ — 95,5% и в интервале $M \pm 1\sigma$ — 68,3% вариант ряда. Чем меньше σ, тем меньше рассеяние ряда, тем точнее и типичнее получается вычисленная для этого ряда средняя величина.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.

На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятностей).

Равномерный закон распределения

На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность.

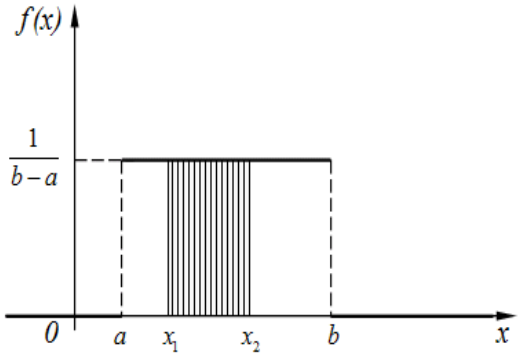


График равномерного распределения

Показательный закон распределения

Величина срока службы различных устройств и времени безотказной работы отдельных элементов этих устройств при выполнении определенных условий обычно подчиняется показательному распределению.

Величина промежутка времени между появлениями двух последовательных редких событий подчиняется зачастую показательному распределению.

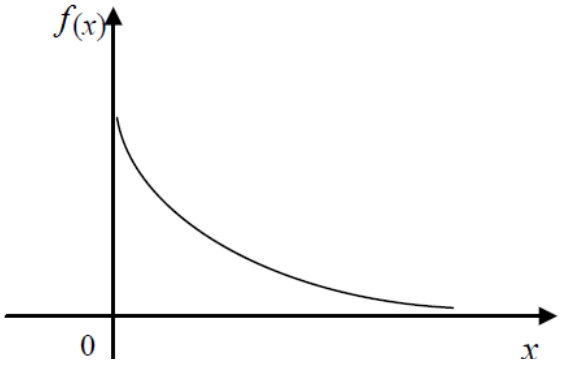


График показательного распределения

Коэффициент вариации – это отношение среднего квадратичного отклонения к средней величине признака, выраженное в процентах. Коэффициент вариации позволяет сравнивать разнородные величины в единых единицах – в процентах, это мера относительной изменчивости случайной величины.

$$\boldsymbol{Cv = \frac{\sigma}{M(x)} \cdot 100\%} \qquad \textbf{(10.8)}$$

при $Cv < 10\%$ — слабое разнообразие признака,

$Cv = 10 - 20\%$ — среднее разнообразие признака,

$Cv > 20\%$ — сильное разнообразие признака

Пример 1. Статистическое распределение случайной величины представлено в таблице

x_i	1	2	5	6	8	10	12	13	15
n_i	2	3	3	5	6	4	4	2	1

Вычислите объем выборки и размах, моду Мо и медиану Ме.

Решение: объем выборки – сумма n_i

$$n = 2 + 3 + 3 + 5 + 6 + 4 + 4 + 2 + 1 = 30$$

Размах выборки: $\Delta = 15 - 1 = 14$

Модой является варианта $x = 8$, $\text{Мо} = 8$

Медианой является полусумма 15 и 16 вариант: $x_{15} = x_{16} = 8$, значит $\text{Ме} = 8$

Ответ: n=30, $\Delta = 14$, $\text{Мо} = 8$, $\text{Ме} = 8$.

Пример 2. Случайная величина X задана законом распределения, представленным в таблице

x_i	1	3	5	7
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Вычислите выборочные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Решение: величина X задана выборочным распределением.

1. Вычислим математическое ожидание по формуле 10.2.

$$\bar{X} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}2 = 4{,}4$$

$$M(X) = 4{,}4$$

2. Вычислим дисперсию двумя способами

1 способ: по формуле 10.5.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i$$
$$= (1 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (3 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (5 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}4 + (7 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}2 = 11{,}56 \cdot 0{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}3 + 0{,}36 \cdot 0{,}4 + 6{,}76 \cdot 0{,}2$$
$$= 1{,}156 + 0{,}588 + 0{,}144 + 1{,}352 = 3{,}24$$

2 способ: по формуле 10.6.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Рассчитаем $M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}4 + 7^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 + 2{,}7 + 10 + 9{,}8 = 22{,}6$

Рассчитаем дисперсию $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 22{,}6 - 4{,}4^2 = 3{,}24$

$$D(X) = 3{,}24$$

3. Среднее квадратическое отклонение (формула 10.7)

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$$

4. Коэффициент вариации (формула 10.8)

$$Cv = \frac{\sigma}{M(x)} \cdot 100\% = \frac{1{,}8}{4{,}4} \cdot 100\% = 40{,}9\%$$

Ответ: $M(X) = 4{,}4, D(X) = 3{,}24, \sigma(X) = 1{,}8, Cv = 40{,}9\%$

Простой вариационный ряд составляется обычно при малом числе наблюдений ($n < 30$), а сгруппированный — при большом числе наблюдений – ($n > 30$).

Алгоритм составления сгруппированного вариационного ряда:

1) Определить количество групп в ряду, используя данные таблицы:

Число вариант	31– 45	46 – 100	101 – 200	201–500
Число групп	6 – 7	8 – 10	11 – 12	13 – 17

2) Определить интервал (i) между группами по формуле:

$$\boldsymbol{i = \frac{v_{max} - v_{min}}{\text{число групп}}} \qquad \textbf{(10.9)}$$

3) Определить границы и середину каждой группы

4) Распределить изучаемую совокупность по группам (т.е. подсчитать сколько значений входят в каждый интервал)

5) Составить графическое изображение вариационного ряда (построить гистограмму)

Пример 2. В таблице приведены данные массы тела 100 мальчиков, распределенные на 10 групп (столбец 1). В каждом интервале подсчитано, сколько человек имеют массу тела из указанного интервала (столбец 3). Рассчитаем выборочные характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, построим гистограмму распределения и полигон частот.

Масса тела в кг	Середина интервала (центральная варианта) V_i	Число мальчиков n_i	$V_i \cdot n_i$	$d = V_i - M$	d^2	$d^2 \cdot n_i$
1	2	3	4	5	6	7
[15;17)	16	5	80	– 8	64	320
[17;19)	18	10	180	– 6	36	360
[19;21)	20	11	220	– 4	16	176
[21;23)	22	15	330	– 2	4	60
[23;25)	24	16	384	0	0	0
[25;27)	26	12	312	2	4	48
[27;29)	28	10	280	4	16	160
[29;31)	30	9	270	6	36	324
[31;33)	32	8	256	8	64	512
[33;35]	34	4	136	10	100	400
		$n = 100$	$\sum V_i \cdot n_i = 2448$			$\sum d^2 n_i = 2360$

Решение:

1. В столбце 2 проставим середины интервалов.
2. В столбце 4 вычислим произведения $V_i \cdot n_i$.– они нужны для вычисления математического ожидания:
3. $M = \frac{\sum V \cdot n_i}{n} = \frac{2448}{100} \approx 24$ (кг). То есть, в среднем вес мальчиков исследуемой группы 24 кг.
4. В столбце 5 – найдем разность каждой варианты и математического ожидания $d = V_i - M$ (отклонение от средней),
5. В столбце 6 возведем в квадрат каждое значение из столбца 5: d^2.
6. В ст. 7 перемножим квадраты разностей и соответствующие количества человек $d^2 n_i$.
7. Рассчитаем дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$$D = \frac{\sum d^2 n_i}{n} = \frac{2360}{100} = 23{,}6$$

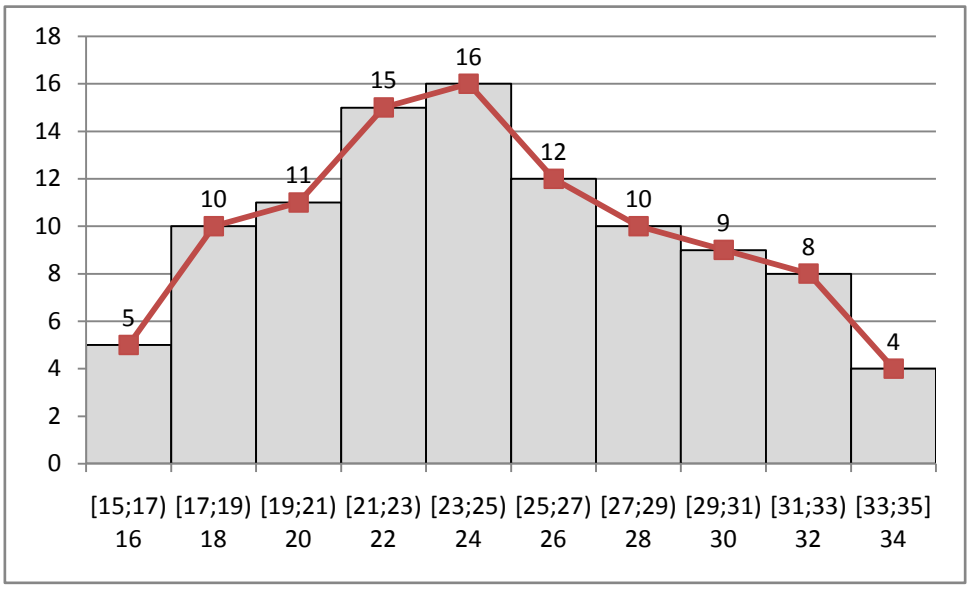
$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{23{,}6} = \pm 4{,}8 \ (кг)$$

8. Вычислим коэффициент вариации:

$$C_V = \frac{\sigma}{M} 100\% = \frac{4{,}8}{24} \cdot 100\% = 20\%$$

Коэффициент вариации говорит о среднем разнообразии признака.

9. Построим гистограмму распределения и полигон частот



Ответ: средний вес мальчиков исследуемой группы составил 24 кг, коэффициент вариации говорит о среднем разнообразии веса.

Проверь себя

1. Для того, чтобы таблица задавала закон распределения случайной величины, значение p_3 должно быть равно

x_i	5	7	9	*11*
p_i	0,2	0,3	p_3	*0,1*

   1) 1;
   2) 0,3;
   3) 0,1;
   4) 0,4.

2. В таблице задания 1 строка x_i содержит
   1) значения вариант;
   2) частоты встречаемости;
   3) относительные частоты встречаемости;
   4) выборочные характеристики.

3. Объем выборки, представленной статистическим распределением, составляет

x_i	1	2	3	4
n_i	2	4	6	3

   1) 10;
   2) 15;
   3) 40;
   4) 35.

4. В таблице задания 3 модой является варианта
   1) 1;
   2) 2;
   3) 3;
   4) 4.

5. Установите соответствие

Объем выборки	Медианой является
1) 45	а) варианта с порядковым номером 22
2) 46	б) варианта с порядковым номером 23
3) 43	в) полусумма 23 и 24 вариант
4) 44	г) полусумма 22 и 23 вариант

6. Выборочная характеристика, рассчитываемая как среднее арифметическое выборки, называется:
   1) математическим ожиданием;
   2) дисперсией;
   3) коэффициентом вариации;
   4) средним квадратическим отклонением.
7. Для сравнения разнородных величин применяется выборочная характеристика
   1) математическое ожидание;
   2) дисперсия;
   3) коэффициент вариации;
   4) среднее квадратическое отклонение.
8. Графическое представление статистического распределения называется
   1) полигоном частот;
   2) гистограммой распределения;
   3) таблицей;
   4) диаграммой.
9. Коэффициент вариации, рассчитанный для показателя длительности лечения от пневмонии в городе N. составил 5%, что говорит о
   1) сильном разнообразии длительности лечения;
   2) слабом разнообразии длительности лечения;
   3) среднем разнообразии длительности лечения;
   4) невозможности характеристики данного показателя.
10. В целях исследования показателя уровня гемоглобина в крови перед началом лечения при железодефицитной анемии, наблюдению подлежали 150 человек. Для анализа полученных данных строится сгруппированный вариационный ряд с количеством групп
   1) 6-7
   2) 8-10
   3) 11-12
   4) 13-17

Эталон ответов:

1. 4	6. 1
2. 1	7. 3
3. 2	8. 1
4. 3	9. 2
5. 1-б, 2-в, 3-а, 4-г	10.4

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Отличие математической статистики от теории вероятностей.
2. Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины.
3. Генеральная и выборочная совокупности.
4. Вариационный ряд. Выборочное распределение. Статистическое распределение.
5. Выборочное математическое ожидание (выборочное среднее), дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.
6. Выполните задания:

   1) Решите задачу:

      На приемных экзаменах 45 студентов получили следующие баллы

39	41	40	42	41	40	42	44	40	43	42	41
43	42	39	41	42	39	41	37	43	41	38	43
42	41	39	40	41	38	44	40	41	40	42	40
41	42	40	43	38	39	41	41	42.			

      а) Постройте таблицу статистического распределения

      б) Постройте таблицу выборочного распределения

      в) Найдите размах выборки

      г) Найдите моду и медиану выборки

      д) Вычислите математическое ожидание

      е) Вычислите дисперсию

      ж) Вычислите среднее квадратическое отклонение

      з) Вычислите коэффициент вариации

      и) Какие выводы можно сделать по найденным показателям?

   2) Проведите исследования и для каждой группы найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Оцените результаты.

      а) Соберите данные о росте студентов вашей группы. Занесите данные в таблицу, разбив их на 2 группы: юноши и девушки.

      б) Соберите данные о весе студентов вашей группы, разбив их на 2 группы: проживающих в общежитии и проживающих дома.

в) Соберите данные о результатах ЕГЭ по математике студентов вашей группы, разбив их на 2 группы: закончившие школы г. Архангельска и закончившие школы области.

г) Соберите данные среди студентов вашей группы о частоте пульса после 10 приседаний, разбив результаты на 2 группы: курящих и некурящих.

3) *Дополнительное задание*: Выполните вычисления выборочных характеристик случайных величин задачи п.2. в программе Microsoft Excel.

Ответы к задаче 1

а. Статистический ряд:

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
n_i	1	3	5	8	12	9	5	2

б. Выборочное распределение:

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
p_i	1/45	3/45	5/45	8/45	12/45	9/45	5/45	2/45

в. Размах выборки: $\Delta = 44 - 37 = 7$

г. Mo=41, Me=41

д. $M(X) = 41$

е. $D(X) \approx 2{,}6$

ж. $\sigma = \approx 1{,}6$

з. $Cv = 3{,}5\%$

Рейтинг занятия.

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	5
2. Проверочная работа.	5
Итого	10

9-10 баллов «5»

7-8 баллов «4»

5-6 баллов «3»

Практические задания

I уровень

10.1. Рассчитайте значения P_k так, чтобы таблицы задавали закон распределения случайной величины:

а)

X_i	2	3	4	5
P_i	0,1	P_2	0,3	0,2

б)

X_i	6	7	8	9
P_i	0,1	0,2	P_3	0,5

в)

X_i	1	5	7	9
P_i	P_1	0,2	0,5	0,2

г)

X_i	6	8	10
P_i	0,4	P_2	0,7

10.2. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (в В):

227; 219; 223; 220; 222; 218; 219; 222; 221; 226; 226; 218; 220; 220; 221; 225; 224; 217; 219; 220. Постройте статистическое распределение.

10.3. В аптеке получены статистические данные о числе проданных упаковок препарата Арбидол за ноябрь. Эти данные собраны в таблицу. Найдите математическое ожидание.

Число проданных упаковок Арбидола	0	1	2	3	4	5
Число дней, в которых было продано столько упаковок препарата Арбидол	3	7	8	9	2	1

10.4. Исследуя продолжительность (в сек) физической нагрузки до развития приступа стенокардии у 12 человек с ишемической болезнью сердца, получили следующие данные: 289, 203, 359, 243, 232, 210, 215, 246, 224, 239, 220, 211. Найди среднюю продолжительность допустимой нагрузки для больных с ИБС.

10.5. После определенной физической нагрузки у группы пациентов с артериальной гипертензией среднее значение артериального давления 179 мм рт ст, среднее квадратическое отклонение показателя 8 мм рт ст; частота сердечных сокращений в среднем 90 уд/мин, среднее квадратическое отклонение 3 уд/мин. Определите какой признак варьируется сильнее АД или ЧСС.

10.6. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон ее распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

10.7. Найдите математическое ожидание и дисперсию следующих случайных величин, заданными своими таблицами распределения:

А)

X	1	3	4	6	7
P(x)	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

Б)

X	-2	-1	0	1	2
P(x)	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

В)

X	5	7	10	15
P(x)	0,2	0,5	0,2	0,1

Г)

X	10	15	20	25	30
P(x)	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

10.8. Из продукции, произведенной фармацевтической фабрикой за месяц, случайным образом отобраны 15 коробочек некоторого гомеопатического препарата, количество таблеток в которых оказалось равным соответственно 50, 51, 48, 52, 51, 50, 49, 50, 47, 50, 51, 49, 50, 52, 48. Представьте эти данные в виде дискретного статистического ряда распределения и постройте полигон частот.

10.9. В результате измерений диаметра капилляра в стенке легочных альвеол были получены следующие результаты: 2,83 мкм; 2,81; 2,85; 2,87; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83; 2,84 мкм. Вычислите выборочное среднее.

10.10. В результате измерений были получены следующие результаты: 3,2; 3,4; 3,3; 3,5; 3,6; 3,7; 3,4; 3,3; 3,4; 3,7; 3,2. Вычислите выборочное среднее.

10.11. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10, 7. Вычислите выборочное среднее, выборочную дисперсию.

10.12. Проведены измерения вязкости крови у 9 больных. Значения относительной вязкости крови у больных составили: 5, 4, 3, 2, 6, 3, 4, 8, 10. Вычислите выборочное среднее, выборочную дисперсию.

10.13. Наблюдения за сахаром крови у 50 человек дали такие результаты:

3,94	3,84	3,86	4,06	3,67	3,97	3,76	3,61	3,96	4,04
3,82	3,94	3,98	3,57	3,87	4,07	3,99	3,69	3,76	3,71
3,81	3,71	4,16	3,76	4,00	3,46	4,08	3,88	4,01	3,93
3,92	3,89	4,02	4,17	3,72	4,09	3,78	4,02	3,73	3,52
3,91	3,62	4,18	4,26	4,03	4,14	3,72	4,33	3,82	4,03

Постройте по этим данным интервальный вариационный ряд с равными интервалами (I – 3,45-3.55, II - 3,55-3,65 и т.д.) и изобразите его графически (начертите гистограмму).

II уровень

10.14. Найдите выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее, квадратическое отклонение, запишите выборочное распределение, если совокупность задана таблицей распределения:

X_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

10.15. По данному закону распределения дискретной случайной величины X найти числовые характеристики: а) математическое ожидание M(X); б) дисперсию D(X).

X:

$\boldsymbol{x}_i$	–2	–1	0	2	3
$\boldsymbol{p}_i$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

10.16. Найдите дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X_i	1	2	5
P_i	0,3	0,5	0,2

10.17. Найдите дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

10.18. Найдите дисперсию случайной величины различными способами, если она задана законом распределения:

X_i	2	3	7
P_i	0,2	0,7	0,1

10.19. Для данной выборки составьте вариационный ряд, статистическое и выборочное распределения. Найдите объем выборки n, размах выбор-

ки Δ, математическое ожидание M(x), дисперсию D(x), среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

а) 2, 6, 5, 4, 6, 2, 5, 6, 6, 2

б) 10, 8, 8, 9, 7, 8, 9, 9, 7,10

10.20. Для выборки 3, 8, -1, 3, 0, 5, 3, -1, 3, 5 вычислите числовые характеристики случайной величины: моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.21. Для выборки 4, 5, 3, 2, 1, 2, 0, 7, 7, 3 вычислите числовые характеристики случайной величины: моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.22. Число состоящих на диспансерном учете больных с хроническими заболеваниями у 9 участковых врачей: 148, 130, 151, 141, 114, 123, 136, 143, 120. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.23. Частота пульса (число ударов в минуту) у 10 лиц после проведения атропиновой пробы: 82, 92, 100, 96, 90, 102, 88, 80, 86, 84. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.24. Число обращений за первые сутки в течение 12 месяцев календарного года в скорую медицинскую помощь города Н.: 165, 161, 167, 165, 164, 163, 142,143, 137, 156, 151, 147. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.25. Число производственных травм среди колхозников Н-ского района в течение 12 месяцев календарного года: 85, 82, 85, 124, 96, 107, 137, 151, 82, 83, 59, 56. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.26. На 15 лекциях по социальной гигиене и организации здравоохранения в весеннем семестре в одной группе III курса присутствовало студентов: 74, 83, 90, 68, 75, 58, 72, 80, 74, 70, 71, 55, 69, 74, 68. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.27. Частота пульса (число ударов в минуту) у 8 студентов в возрасте 20 лет: 74, 80, 66, 70, 74, 74, 68, 70. Вычислите математическое ожида-

ние, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.28. Частота дыхания (число дыхательных движений в минуту) у 8 мужчин в возрасте 35 лет: 20, 22, 19, 15, 16, 21, 24, 19. Вычислите числовые характеристики случайной величины.

10.29. У 12 матерей, имеющих пороки сердца, родились дети массой (в кг): 3,0; 2,6; 2,7; 3,0; 3,1; 2,8; 2,8; 2,6; 2,3; 2,9; 2,8; 2,7. Вычислите числовые характеристики случайной величины.

10.30. Под наблюдением 7 участковых педиатров детской поликлиники состояло детей первого года жизни: 52, 60, 53, 64, 62, 54, 61. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.31. Рост 10 мальчиков в возрасте 2 лет (в см): 90, 92, 95, 91, 93, 96, 94, 93, 89, 97. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.32. Результаты измерения температуры (в °С) у 7 новорожденных: 36,7; 37,1; 37,0; 37,2; 36,8; 36,9; 36,6. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.33. При определении количества сцеженного и высосанного молока у 8 женщин во время кормления ребенка из одной груди получены следующие данные (в г): 100, 110, 105, 85, 100, 90, 95, 105. Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

10.34. Случайная величина X принимает значения 7, –2, 1, –5, 3 с равными вероятностями. Найдите математической ожидание и дисперсию величины X.

10.35. В результате одинаковых проб были получены следующие значения содержания марганца: 0,69%; 0,70%; 0,67%; 0,66%; 0,69%; 0,67%; 0,68%; 0,67%; 0,68%; 0,68%. Составьте статистический ряд. Вычислите объем выборки, размах. Вычислите выборочное среднее, выборочную дисперсию.

10.36. При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29%; 9,38; 9,35; 9,43; 9,53; 9,48; 9,61; 9,68%. Вычислите выборочное среднее, выборочную дисперсию.

10.37. Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен по анатомии 0,7 (событие А), фармакологии – 0,9 (событие В). Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

10.38. В денежной лотерее выпущено 100 билетов: 1 билет с выигрышем 1000 р., 10 билетов – с выигрышем по 100 р. Найдите закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

10.39. В партии из шести деталей имеются четыре стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

На основе приведенных данных в задачах ниже рассчитайте: объем выборки, амплитуду ряда; математическое ожидание; дисперсию; среднее квадратическое отклонение; коэффициент вариации. Сделайте заключение.

10.40. У 10 рабочих, имевших в течение пяти лет контакт со свинцом, определяли его содержание в моче. Концентрация свинца составила (в мг/л): 68, 70, 78, 75, 71, 81, 74, 73, 77, 76.

10.41. В больнице проанализировано 15 «Медицинских карт» лиц, перенесших катаральную форму ангины. Сроки лечения составили (в днях): 3, 5, 6, 7, 4, 5, 3, 3, 5, 6, 5, 7, 6, 5, 4.

10.42. При анализе сроков лечения переломов челюсти у 10 больных получены следующие данные (в днях): 9, 13, 8, 10, 11, 12, 7, 18, 16, 6.

10.43. Число состоящих на диспансерном учете больных гипертонической болезнью у 10 участковых терапевтов города: 20, 21, 22, 23, 25, 25, 21, 27, 27, 25.

10.44. Сроки стационарного лечения 10 больных детей (в днях): 12, 14, 7, 16, 18, 12, 12, 14, 14, 17

10.45. По приведенным результатам измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов. Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов. (В качестве вариант принять середины указанных интервалов)

рост	154 - 158	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174	174 - 178	178 - 182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

III уровень

10.46. Задача о стрелка́х.

Пусть X и Y – число очков, выбиваемых первым и вторым стрелками, n – кол-во попаданий в это число. Необходимо выявить, какой из двух стрелков стреляет лучше.

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	15	11	4	5	4	10	10	4	5	12	20

Y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	3	5	9	11	24	21	10	10	4	2

10.47. При оценке внутрисерийной воспроизводимости глюкозы проводим 10 измерений подряд в одной и той же пробе (контрольной сыворотке). Результаты заносим в таблицу. Заполните пропуски в таблице, рассчитайте среднее квадратическое отклонение по формуле $\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum(x_i - M(x))^2}{n-1}}$, вычислите пределы достоверности $M(x) \pm 3\sigma$. Укладываются ли измеренные значения в пределы достоверности? Вычислите коэффициент вариации (чем меньше коэффициент вариации, тем лучше воспроизводимость)

№	x	$x_i - M(x)$	$(x_i - M(x))^2$
1	6,1		
2	5,9		
3	6,3		
4	6,2		
5	5,9		
6	6,0		
7	6,0		
8	6,2		
9	6,1		
10	6,0		

10.48. При оценке внутрисерийной воспроизводимости глюкозы по методике Биоконт С № 11008/93. Заполните пропуски в таблице, рассчитайте среднее квадратическое отклонение по формуле $\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum(x_i - M(x))^2}{n-1}}$, вычислите пределы достоверности $M(x) \pm 3\sigma$. Укладываются ли измеренные значения в пределы достоверности? Вычислите коэффициент вариации (чем меньше коэффициент вариации, тем лучше воспроизводимость)

№	x	$x_i - M(x)$	$(x_i - M(x))^2$
1	6,3		
2	5,8		
3	5,6		
4	6,2		
5	6,4		
6	6,0		
7	5,7		
8	6,1		
9	6,3		
10	5,8		

В следующих заданиях постройте сгруппированный вариационный ряд. Найдите медиану (Ме), моду (Мо), постройте гистограмму распределения.

10.49. Постройте дискретный вариационный ряд для 60 абитуриентов по числу баллов, полученных ими на приемных экзаменах: 20; 19; 22; 24; 21; 18; 23; 17; 20; 16; 15; 23; 21; 24; 21; 18; 23; 21; 19; 20; 24; 21; 20; 18; 17; 22; 20; 16; 22; 18; 20; 17; 21; 17; 19; 20; 20; 21; 18; 22; 23; 21; 25; 22; 20; 19; 21; 24; 23; 21; 19; 22; 21; 19; 20; 23; 22; 25; 21; 21. Постройте сгруппированный вариационный ряд с интервалом 2 балла.

10.50. Получены следующие данные о длительности лечения в поликлинике 45 больных ангиной (в днях): 20, 18, 19, 16, 17, 16, 14, 13, 15, 14, 15, 13, 12, 13, 3, 4, 12, 11, 12, 11, 10, 12, 11, 10, 11, 8, 7, 11, 11, 10, 10, 10, 9, 8, 8, 9, 4, 5, 6, 9, 5, 9, 6, 7, 7.

10.51. Частота дыхания (число дыхательных движений в минуту) у 47 мужчин в возрасте 40-45 лет: 12, 14, 13, 15, 16, 16, 16, 19, 19, 20, 20, 20, 19, 13, 15, 12, 15, 13, 15, 12, 17, 12, 17, 16, 17, 13, 16, 17, 18, 14, 15, 16, 18, 14, 15, 14, 17, 18, 14, 18, 20, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

10.52. Частота пульса (число ударов в минуту) у 55 студентов-медиков перед экзаменом: 64, 66, 60, 62, 64, 68, 70, 66, 70, 68, 62, 68, 70, 72, 60, 70, 74, 62, 70, 72, 72, 64, 70, 72, 66, 76, 68, 70, 58, 76, 74, 76, 76, 82, 76, 72, 76,74, 79, 78, 74, 78, 74, 78, 74, 74, 78, 76, 78, 76, 80, 80, 80, 78, 78.

10.53. Длительность нетрудоспособности (в днях) у 35 больных с острыми респираторными заболеваниями, лечившихся у участкового врача-терапевта: 6, 7, 5, 3, 9, 8, 7, 5, 6, 4, 9, 8, 7, 6, 6, 9, 6, 5, 10, 8, 7, 11, 13, 5, 6, 7, 12, 4, 3, 5, 2, 5, 6, 6, 7.

10.54. Число состоящих на диспансерном учете больных у 33 невропатологов поликлиник крупного города: 85, 87, 90, 91, 89, 91, 90, 93, 94, 90, 93, 88, 98, 92, 94, 88, 96, 90, 92, 95, 87, 90, 91, 86, 92, 89, 97, 89, 99, 100, 82, 93, 88.

10.55. Лихорадочный период при пневмонии у 32 больных (число дней): 2, 8, 14, 13, 7, 6, 4, 12, 8, 3, 4, 5, 10, 11, 5, 10, 10, 12, 8, 9, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 7, 8, 6, 10, 9, 11

10.56. Длительность лечения ангины у 45 больных составила: 18, 18, 17, 16, 17, 16, 14, 13, 15, 13, 12, 13, 13, 12, 11, 12, 11, 10, 12, 11, 10, 11, 8, 7, 11, 11, 10, 10, 10, 9, 8, 8, 9, 5, 4, 6, 9, 5, 6, 9, 6, 7, 7, 14, и 15 дней. Вычислите средний арифметический (M); среднее квадратическое отклонение (σ); коэффициент вариации (Cv)

10.57. Число состоящих на диспансерном учете больных гипертонической болезнью у 50 участковых терапевтов города: 20, 21, 22, 23, 25, 25, 21, 27, 27, 25, 26, 27, 25, 22, 23, 24, 23, 24, 22, 23, 24, 24, 24, 25, 24, 25, 24, 28, 24, 29, 25, 26, 27, 27, 30, 31, 34, 31, 35, 32, 30, 30, 36, 25, 35, 38, 39,28, 30, 31.

10.58. Число состоящих на диспансерном учете больных язвенной болезнью желудка и двенадцатиперстной кишки у 45 участковых терапевтов: 15, 12, 29, 30, 15, 17, 17, 19, 20, 20, 21, 21, 17, 18, 18, 26, 27,18, 22, 22, 19, 22, 23, 21, 26, 27, 21, 19, 23, 23, 25, 25, 19, 20, 20, 28, 29, 21, 21, 22, 22, 23, 25, 26, 28.

10.59. Сроки стационарного лечения 32 больных детей (в днях): 12, 14, 7, 16, 18, 12, 12, 14, 14, 17, 18, 15, 18, 19, 17, 15, 15, 15, 17, 16, 9, 10, 10, 11, 16, 19, 20, 16, 17, 18, 18, 15.

10.60. Частота пульса (число ударов в минуту), по данным медицинского осмотра 40 девочек-первоклассниц: 80, 82, 74, 80, 72, 74, 68,

82, 80, 78, 70, 66, 80, 72, 68, 72, 74, 80, 72, 74, 82, 66, 76, 76, 74,70, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 70,82, 68, 74, 70, 70, 70.

10.61. Число детей в возрасте до 1 года, состоящих на учете у 34 участковых педиатров: 58, 62, 60, 55, 62, 63, 65, 48 49, 52, 54, 42, 51, 59, 57, 47, 48, 48, 40, 45, 51, 60, 39, 50, 58, 40, 51, 42, 54, 49, 47, 38, 45, 45.

10.62. Число детей, больных ревматизмом, в возрасте до 15 лет, состоявших на диспансерном учете у 40 врачей-ревматологов детских поликлиник: 35, 34, 28, 35, 30, 27, 30, 35, 31, 32, 28, 30, 32, 31, 30, 34, 31, 32, 30, 32, 30, 32, 28, 35,25, 34, 32, 32, 33, 34, 26, 38, 40, 42, 34, 36, 32, 30, 28, 32.

10.63. Результаты измерения длины тела при рождении у 45 девочек (в см): 44, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 47, 48, 48, 48, 49, 49, 49, 49, 49, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 53, 53, 53, 53, 53, 54, 54, 55, 56.

10.64. Результаты измерения массы тела у 35 новорожденных мальчиков (в кг): 4,0; 3,2; 3,7; 4,5; 4,4; 3,0; 4,3; 3,3; 3,2; 4,1; 3,8; 3,8; 4,2; 4,1; 4,0; 3,3; 3,1; 2,5; 2,8; 3,2; 4,2; 3,5; 2,9; 3,5; 3,2; 3,1; 5,0; 2,7; 3,1; 3,3; 3,2; 3.0; 3,0; 3,2; 3,8.

10.65. При измерении артериального давления у случайным образом отобранных 30 пациентов клиники получены следующие результаты (мм. рт. ст.): 172, 163, 157, 158, 136, 169, 153, 142, 147, 134, 164, 167, 131, 152, 145, 176, 122, 149, 154, 161, 156, 151, 166, 133, 155, 179, 148, 143, 128, 138. Представьте эти данные в виде интервального статистического ряда распределения и постройте гистограмму относительных частот.

11. Медицинская статистика. Медико-демографические показатели.

Актуальность темы

Медицинская статистика (санитарная статистика) — отрасль статистики, изучающая явления и процессы в области здоровья населения и здравоохранения.

Основными задачами медицинской статистики являются разработка специальных методов исследования массовых процессов и явлений в медицине и здравоохранении; выявление наиболее существенных закономерностей и тенденций в здоровье населения в целом и в различных его группах (возрастных, половых, профессиональных и др.) во взаимосвязи с конкретными условиями и образом жизни: изучение и оценка состояния и динамики развития сети, деятельности учреждений здравоохранения и медицинских кадров.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- рассчитать интенсивные показатели (коэффициент рождаемости, смертности, естественного прироста), экстенсивные показатели, структуру населения;
- дать оценку демографическим показателям; определить тип структуры населения;
- рассчитать показатели медицинской деятельности: нагрузка в день на приеме, посещаемость на дому в день, число обращений на 1 жителя в год и т.д.

Обучающийся должен знать:

- задачи медицинской статистики;
- основные формулы расчета экстенсивных и интенсивных показателей;
- примеры показателей медицинской деятельности и формулы их расчета.

Ключевые понятия и формулы

Интенсивный показатель определяет интенсивность развития (частоту, уровень, распространенность) явления в среде, которая продуцирует это явление.

$$\textit{Интенсивный показатель} = \frac{\textit{явление}}{\textit{среда}} \cdot 10^n \ (100; 1000; 10000 \ldots \textit{и т. д.}) \qquad \textbf{(11.1)}$$

Примерами интенсивных коэффициентов могут служить коэффициенты рождаемости, смертности, заболеваемости, инвалидности.

Экстенсивный показатель характеризует распределение явления на его составные части, его внутреннюю структуру или отношение частей к целому (удельный вес).

$$\textit{Экстенсивный показатель} = \frac{\textit{часть совокупности (явления)}}{\textit{вся совокупность (явление)}} \cdot 10^n \qquad \textbf{(11.2)}$$

Множитель 10^n зависит от распространенности явления в среде.
Чем реже явление встречается, тем больше множитель.
Показатель интенсивности выражается:

а) при основании 100 человек – в процентах (%);
б) при основании 1 000 человек – в промилле ‰);
в) при основании 10000 человек – в продецимилле (‰0);
г) при основании 100 000 человек – в просантимилле (‰00).

Медицинская демография изучает процессы воспроизводства населения с позиций медицины.
Основные разделы демографии:

1. Статика населения.
2. Динамика населения.

Статика населения - изучает численность и состав населения на определенный момент времени по следующим признакам:

- пол,
- возраст,
- социальные группы,
- национальность,
- язык,
- семейное положение,
- образование,
- место жительства (город, село),
- плотность населения и др.

Основным источником сведений о численности и составе населения, его территориальном размещении служат данные ***переписи населения***, которые принято проводить, как правило, каждые 10 лет

Динамика населения - изучает изменение численности населения за счет его механического и естественного движения.

Механическое движение населения - миграция.

Естественное движение населения - (воспроизводство населения) - изменение численности населения, происходящее за счет рождаемости и смертности.

Оценка показателей рождаемости и смертности производится с обязательным учетом их динамики, а также факторов и причин их определяющих.

Рождаемость - частота рождений за 1 год на 1000 населения, проживающего на конкретной территории. Он дает представление о том, с какой скоростью увеличивается население за счет рождаемости на изучаемом отрезке времени.

$$\text{Коэффициент рождаемости} = \frac{\text{число родившихся живыми за год} \cdot \mathbf{1000}}{\text{среднегодовая численность населения}} \qquad \textbf{(11.3)}$$

$$\textit{Среднегодовая численность населения} = \frac{1}{2}(\textit{численность населения на начало года} + \textit{численность населения на конец года}). \qquad \textbf{(11.4)}$$

Шкала оценки уровня рождаемости населения.

Уровень рождаемости	**Коэффициент рождаемости на 1000 жителей (‰)**
Очень высокий	Более 40,0
Высокий	25-30
Средний	15-25
Низкий	10-15
Очень низкий	Менее 10,0

Смертность – частота смертных случаев за год на 1000 населения на конкретной территории.

$$\textit{Коэффициент}\ \text{смертности} = \frac{\textit{число умерших за год} \cdot 1000}{\textit{среднегодовая численность населения}} \qquad \textbf{(11.5)}$$

Оценка показателя смертности:

Уровень смертности	**Коэффициент смертности (‰)**
Высокий	> 15
Средний	9 - 15
Низкий	7 - 9

Детская смертность – частота смертных случаев среди детского населения (0-14 лет 11 мес 29 дней).

Оценка показателя детской смертности

Уровень детской смертности	**Коэффициент детской смертности (‰)**
Высокий	> 50
Средний	30–50
Низкий	<30

Младенческая смертность – смертность детей первого года жизни.

В практическом здравоохранении показатель младенческой смертности рассчитывается:

$$\text{Показ млад. смертн.} = \frac{\text{число умерших в возрасте до года в данном году} \cdot 1000}{\text{число родившихся живыми в данном году}} \quad \textbf{(11.6)}$$

Метод Ратса: **(11.7)**

$$\text{Показ млад. смертн.} = \frac{\text{число умерших в возрасте до года в данном году} \times 1000}{\frac{2}{3}\text{детей родившихся живыми в данном году} + 1/3 \text{ детей родившихся живыми в предыдущем году}}$$

Оценка уровня младенческой смертности

коэффициент младенческой смертности (в ‰)	**Оценка уровня младенческой смертности**
До 10	Низкий
10 - 19,9	Средний
20 и более	Высокий

Перинатальная смертность включает мертворождаемость (смерть наступила до родов или в родах)

$$\text{Перинатальная смертность} = \frac{(\text{число мертворожденных} + \text{умерших в первые } 168 \text{ ч}) \times 1000}{\text{число родившихся детей (живых и мертвых)}} \quad \textbf{(11.8)}$$

Неонатальная смертность – смерть наступила в течение 28 суток после рождения ребенка.

$$\text{Показатель НС} = \frac{\text{Число умерших в неонатальном периоде} \times 1000}{\text{Число живорожденных}} \quad \textbf{(11.9)}$$

Типы населения:

1. ***Прогрессивный*** – доля лиц в возрасте до 14 лет превышает долю лиц старше 50 лет.
2. ***Стационарный*** – доли лиц в указанных возрастных группах имеют равное значение.
3. ***Регрессивный*** – доля лиц старше 50 лет больше чем доля лиц младше 14 лет.

Методика (алгоритм) анализа демографических показателей

Для оценки структуры населения необходимо:

1. Рассчитать показатели удельного веса каждой возрастной группы.
2. Определить тип структуры населения и сделать вывод.

Показатели медицинской деятельности

1. Среднее число дней занятости койки в году (функция больничной койки)

$$\frac{\textit{Число койко-дней, проведенных больными в стационаре в течение года}}{\textit{Среднегодовая численность населения}} \quad \textbf{(11.10)}$$

2. Обеспеченность населения больничными койками

$$\frac{\textit{Число больничных коек}}{\textit{Среднегодовая численность населения}} \cdot 10000 \quad \textbf{(11.11)}$$

3. Частота госпитализации

$$\frac{\textit{Число лиц, выбывших (выписанных + умерших)}}{\textit{Среднегодовая численность населения}} \cdot 1000 \quad \textbf{(11.12)}$$

4. Оборот койки

$$\frac{\textit{Число лиц, проходивших госпитализацию}}{\textit{Среднегодовое число коек}} \quad \textbf{(11.13)}$$

5. Средняя длительность пребывания больного на койке

$$\frac{\textit{Число койко-дней, проведенных больными в стационаре в течение года}}{\textit{Число лиц, проходивших госпитализацию}} \quad \textbf{(11.14)}$$

6. Среднее число пролеченных больных на одну должность врача (среднего медперсонала)

$$\frac{\textit{Число лиц, выбывших (выписанных + умерших)}}{\textit{Число занятых должностей}} \quad \textbf{(11.15)}$$

7. Число обращений к фельдшеру на 1 жителя в год

$$\frac{\textit{число обращений в год}}{\textit{число жителей}} \quad \textbf{(11.16)}$$

8. Нагрузка фельдшера на приеме в день (человек)

$$\frac{\textit{число обращений в год}}{\textit{число рабочих дней в году}} \quad \textbf{(11.17)}$$

9. Нагрузка фельдшера на приеме в час (человек)

$$\frac{\textit{число обращений в год}}{\textit{число отработанных часов в день} \cdot \textit{число рабочих дней в году}} \quad \textbf{(11.18)}$$

10. Число посещений на дому в день

$$\frac{\textit{число посещений на дому за год}}{\textit{число рабочих дней в году}} \quad \textbf{(11.19)}$$

11. Удельный вес посещений на дому

$$\frac{\textit{число посещений на дому}}{\textit{число обращений + число посещений на дому}} \cdot 100\% \quad \textbf{(11.20)}$$

12. Удельный вес заболевания в общей структуре заболеваемости

$$\frac{\textit{число случаев конкретного заболевания}}{\textit{число всех заболеваний}} \cdot 100\% \qquad \textbf{(11.21)}$$

13. Среднее число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет

$$\frac{\textit{число патронажных посещений на дому к детям до } 3 \textit{ лет}}{\textit{число детей до } 3 \textit{ лет}} \qquad \textbf{(11.22)}$$

Проверь себя

1. Частоту явления в данной среде характеризует коэффициент:
   1) интенсивный
   2) экстенсивный
   3) наглядности
   4) соотношения
2. Доля заболеваний дифтерией в общем числе инфекционных болезней является показателем
   1) наглядности
   2) соотношения
   3) экстенсивный
   4) интенсивный
3. К показателям экстенсивности относится
   1) средняя продолжительность жизни
   2) смертность населения
   3) доля девочек среди новорожденных
   4) динамика рождаемости за 10 лет
4. Число дней нетрудоспособности на 100 работающих является показателем
   1) наглядности
   2) соотношения
   3) экстенсивным
   4) интенсивным
5. Показатель «смертность детей возрастной группы 10-14 лет» является:
   1) экстенсивным
   2) интенсивным
   3) соотношения
   4) наглядности
6. Экстенсивные, интенсивные коэффициенты, коэффициенты соотношения и наглядности являются
   1) абсолютными показателями в санитарной статистике
   2) относительными показателями в санитарной статистике
   3) показателями деятельности ФАП
   4) медико-демографическими показателями
7. В городе проживает 10 000 человек. В предыдущем году родилось 80 детей. Показатель рождаемости на 1000 населения равен
   1) 125‰
   2) 12,5‰

3) 80‰ 4) 8‰

8. Население города Н. 100000 человек. В течение года умерло 1400 человек. Коэффициент смертности равен
   1) 14% 3) 7,1‰
   2) 14‰ 4) 1,4‰

9. Население города А. 15000 человек, в том числе женщин – 7800 человек. Доля женщин равна
   1) 19,2% 3) 52%
   2) 78% 4) 48%

10. За месяц зарегистрировано 100 заболеваний, из них 20 случаев травмы. Удельный вес травм за месяц в структуре заболеваемости составил
   1) 20% 3) 5%
   2) 2% 4) 50%

Эталон ответов:

1 – 1); **2** – 3); **3** – 3); **4** – 4); **5** – 2); **6** – 2); **7** – 4); **8** – 2); **9** – 3); **10** – 1)

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Задачи медицинской статистики.
2. Понятие интенсивного и экстенсивного показателей. Примеры.
3. Медицинская демография, ее основные разделы.
4. Понятие и формулы расчета показателей: рождаемости, смертности, естественного прироста, детская и младенческая смертность. Оценка показателей.
5. Возрастная структура населения, определение типа населения.
6. Показатели медицинской деятельности: число обращений на 1 жителя в год, нагрузка на приеме в день, нагрузка на приеме в час, число посещений на дому в день, удельный вес посещений на дому, среднее число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет, среднее число пролеченных больных на одну должность врача (среднего медперсонала)
7. Показатели деятельности отделения стационара: оборот койки, средняя длительность пребывания больного на койке, обеспеченность населения больничными койками; частота госпитализации.
8. Выполните задания:

1) Вычислите удельный вес заболеваний, если численность совокупного населения города А. в 2011 г. – 351984

Абсолютное число впервые установленных заболеваний в городе А. за 2011 год:	
инфекционных заболеваний	21391
болезней органов дыхания	139882
болезней по классу «Травмы и отравления»	48021
болезней мочеполовой системы	22391
болезней кожи и ПЖК	20641
болезней костно-мышечной системы	14207

2) Медицинский кабинет школы в течение года вел учет заболеваемости каждого из учеников. В конце года на стенде был вывешен полигон частот, показывающий, как распределились учащиеся по количеству заболеваний за год:

Зная, что в школе учатся 1200 учеников, представьте эти данные в виде таблицы абсолютных, относительных частот. Сколько учеников в течение года не болели ни разу?

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	5
2. Проверочная работа.	5
Итого	10

9-10 баллов «5»
7-8 баллов «4»
5-6 баллов «3»

Практические задания

I уровень

11.1. В городе проживает 120 000 человек (среда). В предыдущем году родилось 1080 детей (явление). Определите и оцените показатель рождаемости (на 1000 населения).

11.2. Рассчитать статистический показатель рождаемости в г. А, если число родившихся живыми в данном году 6400, а среднегодовая численность населения данного города 800000. Оцените результат.

11.3. Вычислите и оцените показатель рождаемости в городе Н., если его население 300 000 человек, родилось 6000 детей, в том числе 40 мертворожденных.

11.4. Население города Н. в 2005 г. составило 1 318 600 человек. В течение года умерло 22 944 человек. Вычислить коэффициент смертности (интенсивный показатель), оценить результат.

11.5. В городе А в 2010 г. численность населения 60 000 чел. Родилось 1 200 чел. Умерло 360 чел. Вычислите: а) Коэффициент рождаемости, б) Коэффициент смертности, в) Коэффициент естественного прироста. Дайте оценку демографической ситуации.

11.6. В таблице приведены результаты когортного исследования влияния курения сигарет на частоту случаев ишемической болезни сердца. Вычислите коэффициент заболеваемости ишемической болезнью сердца.

Категории участников исследования	Число случаев болезни	Число человек под наблюдением в начале исследования	Коэффициент заболеваемости ИБС
Никогда не курили	62	32758	а)…
Бросили курить	53	25435	б)…
Курящие	156	54541	в)…
Всего	271	112734	г)…

11.7. В 2010 г. население города А. составило 1318600 человек, в том числе мужчин – 605300 человек. Вычислить долю мужчин (экстенсивный коэффициент).

11.8. Численность населения региона С. составляет – 2181300 человек. Из них: городское население – 1201200 человек; сельское население – 980100 человек. Рассчитать показатели: а) городского; б) сельского населения региона С.

11.9. В городе Р. Н-ской обл. в 1984 г.: численность населения 500 000 человек, родилось 9000, умерло 4000. В числе умерших детей в возрасте до 1 года – 270, в том числе детей, умерших до 1 мес. – 130. Рассчитайте следующие показатели: а) Коэффициент рождаемости; б) Коэффициент смертности; в) Смертность детей до года в структуре смертности; г) Смертность детей до 1 месяца в структуре смертности. Оцените результаты.

11.10. Пользуясь приведенными данными, определите возрастную структуру детского населения, если численность детского населения города Н. составляет – 6290. В том числе в возрасте: от 0 до 1 года – 350 детей; от 1 до 3 лет – 830 детей; от 4 до 6 лет – 1510 детей; от 7 до 10 лет – 1850 детей; от 11 до 14 лет – 1750 детей.

11.11. Пользуясь приведенными данными, рассчитайте структуру причин смерти населения города Н., если умерли 1660 человек, в том числе:

а) от болезней системы кровообращения – 940 человек;
б) от злокачественных новообразований – 220 человек;
в) от травм, отравлений и других последствий воздействия внешних причин – 200 человек;
г) от болезней органов дыхания – 80 человек;
д) от болезней органов пищеварения – 40 человек;
е) от болезней нервной системы – 25 человек;
ж) от инфекционных и паразитарных болезней – 20 человек;
з) от прочих причин – 135 человек.

11.12. Пользуясь приведенными данными, рассчитайте все возможные интенсивные и экстенсивные показатели, если численность населения города Д. составляет – 500000 человек. Зарегистрировано 300000 первичных обращений населения в лечебные учреждения, в том числе по поводу: болезней сердечно-сосудистой системы – 98000; болезней органов дыхания – 110000; травм, отравлений и других последствий воздействия внешних причин – 55000; болезней нервной системы – 22000; других причин – 15000.

Интенсивные показатели:

а) первичное обращение

б) болезни ССС
в) болезни органов дыхания
г) травмы, отравления
д) болезни нервной системы
е) другие причины

Экстенсивные показатели:

ж) болезни ССС в структуре заболеваемости
з) болезни ОД в структуре заболеваемости
и) травмы, отравления в структуре заболеваемости
к) болезни НС в структуре заболеваемости
л) другие причины в структуре заболеваемости

11.13. Пользуясь приведенными данными, рассчитайте интенсивные и экстенсивные показатели, если численность населения города П. составляет – 1 308 400 человек. Из них в возрасте:

0 - 14 лет	– 223 600 человек
15 - 49 лет	– 647 800 человек
50 лет и старше	– 437 000 человек
Родилось (за год)	– 9684 человек.
Умерло (за год)	– 22 508 человек.

11.14. В городе А в 2005 г. Родилось живыми в 2005 г. 1200 чел. Мертворожденных 5 чел. Умерло детей в возрасте до 1 г. 24 чел.

Умерло детей в возрасте до 1 м. 12 чел.

Умерло детей на 1 неделе жизни 12 чел.

Родилось живыми в 2004 г. 1180 чел

Выполните оценку показателей:

а) коэффициента младенческой смертности.
б) коэффициента неонатальной смертности.
в) коэффициента перинатальной смертности.

11.15. В городской клинической больнице в течение года проходили лечение 4088 больных (из них 143 умерло). Ими проведено 65410 койко-дней, число среднегодовых развернутых коек было 190. Найдите: а) показатель средней длительности пребывания больного на койке, б) оборот койки, в) эффективность лечения.

11.16. Определите качественные показатели работы терапевтического отделения стационара городской больницы города Н. в 2010 г. В терапевтическом отделении 130 коек. Выписано за год 2700 больных, из

них умерло 300. Проведено в отделении всеми больными 45 500 койко-дней. Найдите: а) показатель средней длительности пребывания больного на койке, б) оборот койки, в) эффективность лечения.

II уровень

11.17. В городе К. проживает 100 000 человек, в том числе в возрасте до 15 лет – 24 000, от 15 до 49 лет – 50 000, 50 лет и старше – 26 000 человек. В изучаемом году в городе родилось живыми 1230 детей (в предыдущем – 1290). Умерло за год 1150 человек, в том числе в возрасте до 1 года – 28 человек.

Данные о динамике демографических показателей в городе представлены в табл. 1

Динамика демографических показателей города К. (в ‰)

Показатели	1980	1990	2000	2010	**Изучаемый год**	**В среднем по области за изучаемый год**	**Данные по РФ за 2002**
Рождаемость	17,3	17,6	18,3	16,8		13,2	9,8
Смертность	9,3	10,0	10,4	10,6		10,8	16,3
Младенческая смертность	26,8	26,1	24,8	21,5		18,5	13,3

Задания:

1. Рассчитать и оценить показатели структуры населения по возрасту.
2. Вычислить и оценить демографические показатели за изучаемый год, оценить.
3. Оценить динамику демографических показателей относительно предыдущих показателей.
4. Изобразить графически полученные показатели.
5. Сравнить уровни демографических показателей со среднестатистическими по области и РФ за изучаемый год.

11.18. В родильных домах города:

родилось живыми – 9000

мертворожденных – 60

умерло детей в течение 1-й недели – 90

Среди детей, умерших в возрасте до 1 года было:

умерших от пневмонии – 120

болезней новорожденных – 90

желудочно-кишечных заболеваний – 40
прочих причин – 20
Рассчитайте интенсивные и экстенсивные показатели:
а) показатель младенческой смертности
б) перинатальной смертности
в) показатель неонатальной смертности
г) долю умерших от пневмонии
д) долю умерших от болезней новорожденных
е) долю умерших от ЖК заболеваний
ж) долю умерших от других причин

11.19. В таблице приведены данные по г. Архангельску. Выполните расчеты показателей первичной заболеваемости (в ‰), нарушения осанки (в ‰), коэффициента смертности (в $^{0}/_{0000}$).

Год	Абс число заб	Абс число смертей	Абс. число нарушения осанки	Совокупность населения	Число осмотренных	Показатели первичной заболеваемости	Показатели нарушения осанки	Коэффициент смертности
1994	335754	5989	1298	341743	5567			
1995	346863	5514	1304	352377	5633			
1996	322876	5128	1256	328004	5010			
1997	338498	4706	1366	343204	4431			
1998	369213	4761	1324	373974	4138			
1999	384508	5782	1071	390290	3526			
2000	380390	5556	835	385946	2950			
2001	365378	5507	923	370885	3109			
2002	353437	5813	871	359250	2931			
2003	352334	5784	1078	358118	3043			

11.20. В 2010 г. число жителей села Никольского составляло 800 человек. Детей до 3 лет – 90. На диспансерном учете находилось 25 беременных. Фельдшер ведет прием 4 часа в день. Число обращений к фельдшеру составило 3200, число посещений на дому – 1200. Выявлено 700 заболеваний: из них 21 случай радикулита. Число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет составило 720. Определите показатели нагрузки фельдшера и деятельности ФАП села Никольского:

а) Удельный вес детей до 3 лет
б) Удельный вес беременных
в) Число обращений на 1 жителя в год
г) Нагрузка фельдшера в день (рабочих дней в году 275)
д) Нагрузка фельдшера на приеме в час
е) Число посещений на дому в день
ж) Удельный вес посещений на дому
з) Среднее число посещений на дому к детям в возрасте до 3 лет
и) Удельный вес заболевания радикулитом

11.21. В отчетном году число жителей поселка А. составляло 950 человек. Детей до 3 лет – 35. Фельдшер ведет прием 3 часа в день. Число обращений к фельдшеру составило 3500, число посещений на дому – 1800. Выявлено 520 заболеваний: из них 120 случаев гипертонией. Число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет составило 200. Определите показатели нагрузки фельдшера и деятельности ФАП:

а) Удельный вес детей до 3 лет
б) Число обращений на 1 жителя в год
в) Нагрузку фельдшера в день (рабочих дней в году 275)
г) Нагрузку фельдшера на приеме в час
д) Число посещений на дому в день
е) Удельный вес посещений на дому
ж) Среднее число посещений на дому к детям в возрасте до 3 лет
з) Удельный вес заболевания гипертонией

11.22. В 2010 г. число жителей села N составляло 1100 человек. Детей до 3 лет – 40. Фельдшер ведет прием 3 часа в день. Число обращений к фельдшеру составило 2200, число посещений на дому – 500. Выявлено 600 заболеваний, из них 24 случая заболевания ангиной, 12 травм. Число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет составило 240. Определите показатели нагрузки фельдшера и деятельности ФАП села N:

а) Удельный вес детей до 3 лет
б) Число обращений на 1 жителя в год
в) Нагрузку фельдшера в день (рабочих дней в году 275)
г) Нагрузку фельдшера на приеме в час
д) Число посещений на дому в день
е) Удельный вес посещений на дому
ж) Среднее число посещений на дому к детям в возрасте до 3 лет

з) Удельный вес заболевания ангиной

и) Удельный вес травм

11.23. Количество детей на педиатрическом участке в 2009 году 820 человек, что составляет 14,0% от общей численности детей по отделению. Детей до года на участке числилось 50.

1) Сколько детей в 2009 числилось на отделении?

2) Какой процент составляют дети до года на участке?

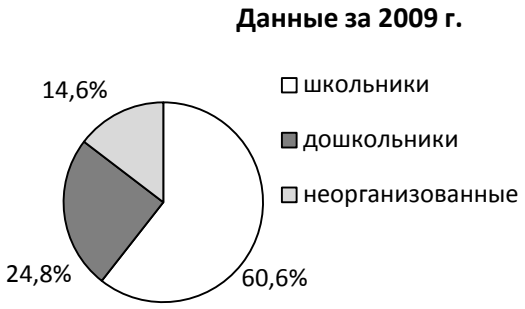
11.24. Количество детей на педиатрическом участке в 2010 году – 840, что составляет 16% от общей численности детей по отделению. Детей до года на участке – 40 человек.

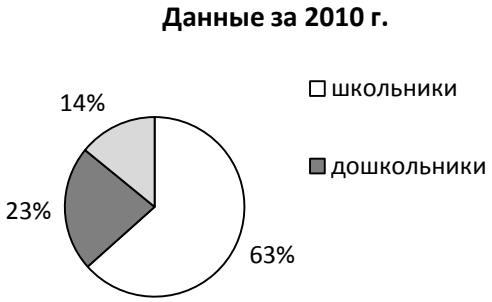
1) Сколько детей в 2010 году числилось на отделении?

2) Какой процент составляют дети до года на участке?

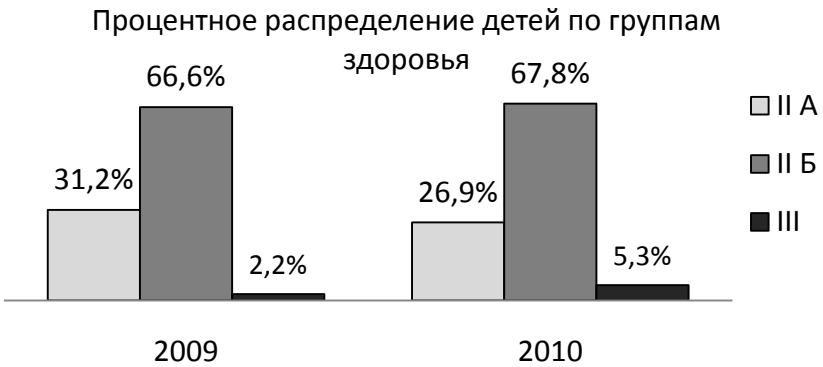
3) Какой процент составляет численность детского населения в 2010 году относительно 2009 года (см. предыдущую задачу)? Сделайте соответствующий вывод.

11.25. По приведенным диаграммам вычислите абсолютное количество детей каждой возрастной категории, если общее количество детей на участке составило 820 – в 2009 году, 840 – в 2010 году.

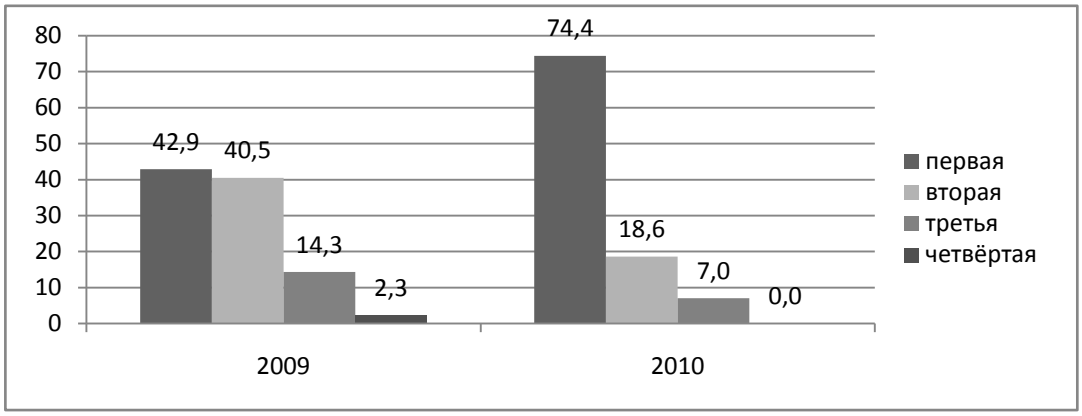




11.26. Рассчитайте абсолютное количество новорожденных каждой группы здоровья, если известно количество новорожденных на участке в 2009 году – 45, в 2010 - 50



11.27. На диаграмме представлено процентное распределение детей по нервно-психическому развитию в 2009 – 2010 гг. Известно, что в 2009 году численность детей на участке составляла 820 человек, в 2010 году – 846 человек.



Рассчитайте абсолютное количество детей по каждой группе нервно-психического развития в 2009 и 2010 гг.

11.28. В таблице приведены показатели работы с детьми первого года жизни за 2009-2010г.г.

	2009год		**2010год**	
Число патронажей педиатра на 1 ребенка	5		4	
Число патронажей медсестры на 1 ребенка	15		18	
Посещения кабинета здорового ребенка	абс.	%	абс.	%
	39	90,7	40	93,0

1. Рассчитайте количество детей до года на педиатрическом участке за каждый отчетный год.
2. Сколько патронажей педиатр выполнил за каждый год (рабочих дней в году считать 275)?
3. Сколько патронажей выполнила медсестра за каждый год?

11.29. В таблице приведены показатели оценки грудного вскармливания детей первого года жизни за 2009-2010 гг. Заполните пропуски в таблице.

Год		2009 год		2010 год	
Показатель		Абс.	%	Абс.	%
Всего детей до года		43	100%	54	100
На грудном вскармливании	До 6 месяцев	11			16,3
	Более 6 месяцев	26			69,8
	Всего	37			
На смешанном вскармливании		1			4,7
На искусственном вскармливании		5			9,3

11.30. В таблице приведены показатели физического развития детей первого года жизни в 2009-2010 годах.

Показатели	2009год		2010год	
	абс.	%	абс.	%
Выше среднего		25,6	11	
Среднее		65,1	29	
Ниже среднего		9,3	3	
Гармоничное		79,0	32	
Дисгармоничное		21,0	11	

Рассчитайте абсолютные и относительные показатели физического развития детей первого года жизни, если за эти годы на участке числилось по 43 ребенка первого года жизни.

III уровень

11.31. Определите качественные показатели работы поликлинического отделения городской больницы № 2 города Н. В 2010 г. поликлиника оказывает медицинскую помощь 30 000 жителей, из них 12 000 сельских жителей. Прием ведут 10 терапевтов. Общее количество обращений к терапевтам составило 60 000. Терапевтами сделано 15000 посещений на дому. Осмотрено для выявления туберкулеза - 3000. Зарегистрировано 450 больных ревматизмом, из них 450 состоят на диспансерном наблюдении. Выполните расчет:

а) числа обращений к терапевтам на 1 жителя
б) удельного веса сельских жителей
в) нагрузку терапевтов в день
г) посещений на дому в день
д) посещений на дому на 1 терапевта
е) удельного веса осмотренных на выявление tbs
ж) удельного веса tbs среди осмотренных
з) удельного веса состоящих на диспансерном учете среди общего населения

11.32. Определите качественные показатели деятельности поликлиники № 2 города В, обслуживающей 50 тыс. населения. В отчете 2010 г. указано, что жителями за год к терапевтам сделано 130000 обращений, из них к своим участковым врачам – 90 000. Оказана медицинская помощь 8000 жителям сельских пригородов (приписных к больнице). Проведен целевой осмотр для выявления туберкулеза - 2500 человек.

а) Число обращений к терапевтам на 1 жителя
б) Удельный вес обращений к своим терапевтам
в) Удельный вес сельских жителей в общей структуре населения
г) Удельный вес охваченных осмотром на tbs
д) Удельный вес tbs среди осмотренных
е) Удельный вес tbs на все население

12. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала

Актуальность темы

При выполнении своих профессиональных обязанностей медицинским работникам часто приходится производить различные математические вычисления. От правильности проведенных расчетов зависит здоровье, а иногда и жизнь пациентов. В этом разделе рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации, где необходимо применение математических методов.

В хозяйственных и статистических расчетах, во многих отраслях науки части величин принято выражать в процентах. Очень часто в лабораторной практике приходится встречаться со случаями приготовления растворов с определенной массовой долей растворенного вещества, смешением двух растворов разной концентрации или разбавлением крепкого раствора водой.

В данной теме рассмотрены типовые задачи на проценты и методы их решения.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

– решать основные задачи на проценты;
– решать задачи на смеси, сплавы, растворы;
– составлять и решать пропорции;
– рассчитывать концентрацию раствора;
– рассчитывать количество сухого вещества на заданный объем жидкости.

Обучающийся должен знать:

– определение процента;
– определение концентрации растворов;
– методы решения задач на проценты.

Ключевые понятия и формулы

Процентом (от латинского pro cento - с сотни) называется сотая доля какого-либо числа и обозначается знаком **%**.

$$\text{Раствор} = \text{сухое вещество} + \text{растворитель}$$

Х% раствор – это значит:

1. В 100 мл раствора содержится Х г сухого вещества;
2. Раствор приготовлен в соотношении Х:100.

Выделим основные типы задач на проценты

Тип задачи	Примеры
1. Выразить число в процентах	Пример 1. $0{,}52 = 0{,}52 \cdot 100\% = 52\%$
2. Выразить процент десятичной дробью или натуральным числом	Пример 2. $34\ \% = \frac{34}{100} = 0{,}34$
3. Нахождение процентов данного числа	Пример 3. Вода составляет 60% от массы тела человека. Сколько воды содержится в теле человека массой 70 кг? Решение: $70 \cdot \frac{60}{100} = 42$ кг Ответ: 42 кг воды содержится в теле человека массой 70 кг.
4. Нахождение числа по его процентам	Пример 4. Сколько сотрудников должно быть в поликлинике, если работает всего 32 человека, что составляет 80% от требуемого количества специалистов? Решение: $\frac{32}{80} \cdot 100\% = 40$ Ответ: 40 человек.
5. Нахождение выражения одного числа в процентах другого (или процентное отношение чисел)	Пример 5. Позвоночник содержит 34 позвонка, из которых 5 – в поясничном отделе. Какой процент составляют позвонки поясничного отдела от общего числа позвонков? Решение: $\frac{5}{34} \cdot 100\% = 14{,}7\%$ Ответ: 14,7% составляют позвонки поясничного отдела от общего числа позвонков.

Методы решения задач на проценты

При решении задач на проценты приходится сталкиваться с понятием «концентрация», «процентное содержание вещества в растворе».

Концентрация – отношение массы растворённого вещества к массе раствора.

Процентное содержание – отношение массы растворённого вещества к массе раствора, выраженное в процентах.

Рассмотрим **методы решения задач** на проценты на примере одной задачи.

Задача: Определите концентрацию раствора, полученного при слиянии 150 г 30%-го и 250 г 10%-го растворов какой-либо соли.

Дано:

$m_1 = 150, \omega_1 = 30\%$
$m_2 = 250, \omega_2 = 10\%$

Найти ω_3

Примечание: массовые доли обязательно будут удовлетворять неравенству

$$\boldsymbol{\omega_1 > \omega_3 > \omega_2}$$

Решение:

I способ. ***Метод пропорций***

Массу вещества в первом (30%) растворе находим методом пропорций:

100 г р-ра – 30 г в-ва,

150 г р-ра – x г в-ва,

$$x = \frac{150 \cdot 30}{100} = 45 \text{ г}$$

Массу вещества во втором (10%) растворе находим аналогично:

100 г р-ра – 10 г в-ва,

250 г р-ра – y г в-ва,

$$y = \frac{250 \cdot 10}{100} = 25 \text{ г.}$$

Следовательно, 400 г нового раствора содержит $45 + 25 = 70$ г растворенного вещества.

Теперь определим концентрацию нового раствора:

400 г р-ра – 70 г в-ва,

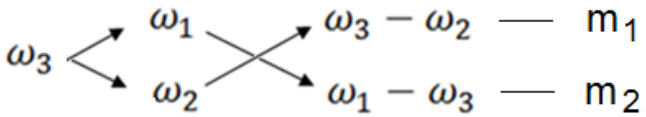
100 г р-ра – z г в-ва,

$$z = \frac{100 \cdot 70}{400} = 17{,}5 \text{ г или } 17{,}5\%.$$

Ответ: 17,5% - процентная концентрация вещества в полученном растворе.

II способ. ***«Правило креста» (или «конверт Пирсона»)***

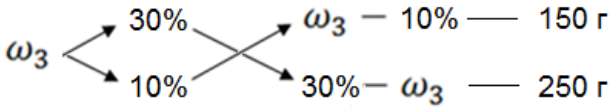
Метод заключается в применении схемы (будем считать, что $\boldsymbol{\omega_1 > \omega_3 > \omega_2}$):



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(\omega_3 - \omega_2)}{(\omega_1 - \omega_2)}$$

Отношение массы первого раствора к массе второго раствора есть отношение разности массовых долей растворенного вещества в смеси и во втором растворе к разности соответствующих величин в первом растворе и в смеси.

Соответственно схеме подставим данные нашей задачи:



$$\frac{150}{250} = \frac{(\omega_3 - 10)}{(30 - \omega_3)}$$

Тогда

$$(30 - \omega_3) \cdot 150 = (\omega_3 - 10) \cdot 250$$

$$4500 - 150\omega_3 = 250\,\omega_3 - 2500$$

$$400\omega_3 = 7000$$

$$\omega_3 = \frac{7000}{400} = 17{,}5\%$$

Ответ: $\omega_3 = 17{,}5\%$

3 способ. ***Алгебраический***

Масса растворенного вещества в смеси будет слагаться из масс растворенного вещества в исходных растворах, поэтому для удобства решения, данные запишем в виде схемы:

150 г 30%	+	250 г 10%	=	(150 + 250) г ω_3%

Масса сухого вещества в первом растворе $150 \cdot \frac{30}{100}$ г.

Масса сухого вещества во втором растворе $250 \cdot \frac{10}{100}$ г.

Масса сухого вещества в получившемся растворе $\frac{\omega_3}{100}(150 + 250)$ г.

Составим уравнение:

$$150 \cdot \frac{30}{100} + 250 \cdot \frac{10}{100} = \frac{\omega_3}{100}(150 + 250)$$

Умножим обе части равенства на 100:

$$150 \cdot 30 + 250 \cdot 10 = \omega_3(150 + 250)$$

$$\omega_3 = \frac{(150 \cdot 30 + 250 \cdot 10)}{(150 + 250)} = 17{,}5\%.$$

Ответ: 17,5 % - концентрация полученного раствора.

Проверь себя

1. Что такое процент?
2. Как найти 1% от числа?
3. Как найти само число, если известен его 1 %?
4. Как перевести проценты в десятичную дробь?
5. Как перевести десятичную дробь в проценты?
6. Запишите в виде дроби 7%
7. Сравните 0,1 или 1%
8. Выразите в процентах 0,005
9. Сколько процентов составляют 100 мл от 1 л?
10. Какую часть составляет сухое вещество в 2% растворе?
11. Сколько граммов сухого вещества в 100 мл 20% раствора?
12. Переведите в проценты отношение 2:50
13. Представьте в виде отношения 0,02%
14. Вычислите 11% от 200 мл
15. Вычислите процентное содержание чистого вещества в растворе, приготовленном из 1кг вещества и 3кг воды

Эталон ответов:

1. сотая часть числа
2. разделить его на 100
3. умножить на 100
4. разделить на 100
5. умножить на 100
6. 0,07 или $\frac{7}{100}$
7. $0{,}1 > 1\%$
8. 0,5%
9. 10%
10. $0{,}02 = \frac{2}{100}$
11. 20г
12. $\frac{2}{50} \cdot 100\% = 4\%$
13. $\frac{0{,}02}{100} = 2:10000 = 1:5000$
14. $0{,}11 \cdot 200 = 22$мл
15. $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Определение процента.
2. Основные типы задач на проценты.
3. Формулы расчета процентной концентрации растворов.
4. Методы решения задач на проценты.
5. Выполните задания:
   1) Решите задачи из данного задачника №№ 12.1 – 12.10.
   2) Составьте и решите 3 типовые задачи на проценты: расчет процента от числа, числа по процентам, процентного отношения двух чисел.
   3) Выведите формулы для решения типовых задач на проценты (см. таблицу в ключевых понятиях и формулах)

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»
9-10 баллов «4»
6-8 баллов «3»

Практические задания

12.1. Определить процентную концентрацию раствора, приготовленного в соотношении:

а) 1:1000
б) 2:5000
в) 3:6000
г) 4 : 1000
д) 9:2000

12.2. Определить концентрацию в соотношении, если процентная концентрация составила:

а) 0,4 %
б) 0,08%
в) 0,005%
г) 0,25%
д) 0,1%

12.3. Отделение функциональной диагностики обслуживало 40 человек в день. После внедрения компьютерных технологий пропускная способность отделения увеличилась на 35%. Сколько человек стало обслуживать отделение?

12.4. С наступлением холодов количество больных с острыми респираторными заболеваниями (ОРЗ) увеличилось до 15 человек в день, а до этого составляло около 10 человек. На сколько процентов возросло число больных с ОРЗ?

12.5. 26 человек поступили в травмпункт с переломом конечностей, что составило 13% от всех обратившихся. Сколько человек поступило в травмпункт?

12.6. Объем крови в организме человека составляет 7% от массы тела. В малом круге кровообращения содержится 20-25%, а в большом – 75-85%. Определите объем циркулирующей крови в большом круге кровообращения человека весом 90 кг.

12.7. Вода составляет 70% от массы тела человека. Определите массу воды в теле человека весом 85 кг.

12.8. Мышечная система человека составляет 40% от массы тела. На долю мускулатуры нижних конечностей приходится 50% всей массы мышц. Найдите массу мышц нижних конечностей человека весом 65 кг.

12.9. Масса головного мозга взрослого человека в среднем 1,4 кг, а спинного – 36 г. Какой процент от массы головного мозга составляет масса спинного мозга?

12.10. Масса головного мозга взрослого человека в среднем 1,5 кг, а новорожденного – 400 г. Какой процент от массы головного мозга взрослого составляет масса головного мозга новорожденного?

12.11. Масса спинного мозга взрослого человека 38 г. Какой процент от массы тела составляет масса спинного мозга человека весом 70 кг?

12.12. Плазма составляет 60 % от крови, а кровь – 7% от массы тела. В состав плазмы входит: белок – 8%, неорганические вещества – 2%, вода – 90%. Рассчитайте состав плазмы человека массой 60 кг.

12.13. Для раствора используется соотношение 2:500. Сколько литров раствора можно приготовить из 3 кг чистого вещества?

12.14. Для раствора используется соотношение 5:200. Определите процентную концентрацию вещества в таком растворе и сколько литров раствора можно приготовить из 1,5 кг чистого вещества?

12.15. Имеется сухой лекарственный сбор 250 г. Для приготовления отвара используется соотношение 30:200. Сколько литров отвара можно приготовить из данного сбора? Какова процентная концентрация этого отвара?

12.16. Для устранения метаболического ацидоза больному внутривенно ввели 300мл 4% раствора гидрокарбоната натрия. Найдите массу сухого вещества в этом растворе.

12.17. Отвар содержит 3% корней алтея. Сколько отвара можно приготовить из 600 г корней алтея?

12.18. Для мытья палаты готовят хлорный раствор. Сколько нужно взять порошка хлорной извести и воды, чтобы приготовить 10 кг 5% раствора хлорной извести?

12.19. 50 г вещества растворен в 200 г воды. Определите процентную концентрацию вещества.

12.20. Фурацилина в растворе 0,05%. Сколько раствора можно получить из 10 граммов фурацилина?

12.21. Фурацилина в растворе всего 0,2%. Сколько литров дезраствора можно получить из 2 г фурацилина?

12.22. Сколько кальция хлорида содержится в 500 мл 10% раствора, введенного пациенту капельно.

12.23. Пациенту вводился раствор натрия хлорида капельно в количестве 200 мл. Известно, что натрия хлорида в этом растворе 1,8 г. Определите процентную концентрацию введенного раствора.

12.24. Для дезинтоксикации организма больному было введено 1,5 л 5% глюкозы. Сколько чистого вещества глюкозы было введено?

12.25. Сколько сульфацила натрия находится во флаконе 5 мл 30% раствора.

12.26. Концентрация фурацилина в растворе 1:5000. Сколько чистого вещества фурацилина находится в 1 мл раствора?

12.27. Сбор №4 содержит: цветков ромашки – 20%, побегов багульника – 20%, цветков ноготков – 20%, травы фиалки – 20%, корней солодки – 15%, листьев мяты – 5%. Сколько граммов каждой из трав содержится в 600 мл 10% отвара?

12.28. Для промывания глаз требуется 0,1% раствор перманганата калия. Имеется 5% раствор. В каком соотношении необходимо разбавить имеющийся раствор для приготовления 0,1% раствора?

12.29. Имеется рабочий раствор хлорной извести 10%. Необходимо приготовить а) 2 л 1%, б) 1л – 3%, в) 1 л – 0,5% раствора. Сколько потребуется рабочего раствора хлорной извести и воды для приготовления растворов в каждом отдельном случае.

12.30. Нужно приготовить 1 л 0,5% раствора нашатырного спирта для стерилизации рук перед операцией. Сколько исходного 10% раствора нужно взять?

12.31. Сколько потребуется соли и воды, чтобы приготовить 5 кг 20% раствора соли?

12.32. Раствор скольких процентов получится из 6 кг вещества и 14 кг воды?

12.33. Морская вода содержит по весу 4% соли. Сколько пресной воды следует прибавить в 20 кг морской воды, чтобы получить 3% раствор соли?

12.34. Имеется 2 кг 60% раствора. Раствор какой процентной концентрации получится, если добавить 1,5 кг воды?

12.35. 3 кг 30% раствора кислоты смешали с 5 кг 20% раствором этой же кислоты. Найдите процентное содержание кислоты в получившемся растворе.

12.36. Имеется 2 раствора: 25% и 50%. Сколько нужно взять каждого, чтобы получить 3 кг 30% раствор?

12.37. Имеется 1 кг 10% раствора уксусной кислоты. Какое количество 70% раствора уксусной кислоты нужно добавить, чтобы получить 20% раствор?

12.38. Из 25% раствора сахара выпарили 30 г воды и получили 40% раствор. Вычислите массу исходного раствора.

12.39. Смешали 5% серную кислоту с 20%, получили 14% раствор. Сколько грамм отдельно той и другой кислоты взято для смеси, если масса первой кислоты на 15 г меньше массы второй?

12.40. Сколько кг 96% медицинского спирта взять, чтобы получить 3 кг 30% раствора?

12.41. Имеется 4 кг 6% раствора соли. Найдите процентное содержание соли в растворе, если к имеющемуся раствору добавить 700 г этой соли.

12.42. Морская вода содержит (по весу) 5% соли. Сколько кг пресной воды следует прибавить к 30 кг морской воды, чтобы содержимое соли в растворе составило 2%?

12.43. Сколько соли необходимо добавить в 200 г 10% раствора соли, чтобы получить 12% раствор?

12.44. Какую массу 30% раствора соли необходимо взять, для растворения в нем еще 12 г этой соли, чтобы получить 35% раствор?

12.45. Из 20% раствора сахара выпарили 40 г воды и получили 30% раствор. Вычислите массу исходного раствора.

12.46. Сколько граммов 3% и 6% растворов азотной кислоты взять для получения 54 г 5% раствора этой кислоты?

12.47. Сколько граммов 30% -го раствора соли надо добавить к 80 г 12% раствора этой же соли, чтобы получить 20% раствор.

12.48. Сколько граммов воды надо добавить к 80 г раствора, содержащего 15% соли, чтобы получить 12% раствор?

12.49. К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5% раствор соли и получили 8% раствор. Какое количество литров 5% раствора добавили?

12.50. До какого веса надо выпарить 800 г 10% раствора соли, чтобы довести ее содержание до 16%?

12.51. Сколько граммов воды надо прибавить к 50 г 35% соляной кислоты, чтобы получить 10% кислоту?

12.52. Определите концентрацию раствора, полученного при смешивании 150 г 30%-го и 250 г 10%-го растворов кислоты.

12.53. Определите, сколько нужно взять 10%-го раствора соли и 30%-го раствора этой же соли для приготовления 500 г 20%-го раствора.

12.54. К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%раствор соли и получили 8% раствор. Какое количество литров 5% раствора добавили?

12.55. 5 л сливок с содержанием жира 35% смешали с 4 л 20% сливок и к смеси добавили 1 л чистой воды. Какой жирности получилась смесь?

12.56. К 200 мл 15% раствора соли добавили 300 мл 40% раствора той же соли и 250 мл чистой воды. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

12.57. Сколько граммов 8% серной кислоты можно получить из 200 г жидкости, содержащей 62% серной кислоты?

12.58. Смешали 10%-й и 25%-й растворы соли и получили 3 кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в кг было использовано?

12.59. Определите массу раствора Na_2CO_3 10% концентрации и массу 37% раствора Na_2CO_3, которые нужно взять для приготовления 540 г раствора 15%-й концентрации.

12.60. Сколько воды нужно добавить к 250 г раствора соли для понижения его концентрации с 45% до 10%?

12.61. Сколько соли нужно добавить к 250 г раствора соли 10%-й концентрации для ее увеличения до 45%?

12.62. Хлоргексидин биглюконат поступает в 20% растворе. Надо получить 10 л 0,5% раствора на 70% спирте. Имеется спирт 96%. Сколько потребуется имеющегося спирта (96%), хлоргексидина (20%) и воды?

12.63. Сколько литров воды надо выпарить из 20 л раствора, содержащего 80% воды, чтобы получить раствор, содержащий 75% воды?

12.64. Если к раствору серной кислоты добавить 100 г воды, то концентрация уменьшится на 40%. Если же к первоначальному раствору добавить 100 г серной кислоты, то концентрация увеличится на 10%. Найти концентрацию первоначального раствора.

12.65. От калорийности суточного пищевого рациона белки должны составлять 14% . Сколько калорий должен получить человек за счет белков, если калорийность рациона равна 1900 ккал? Сколько белков должен получить человек за сутки, если при окислении 1г белков образуется 4,1 ккал?

12.66. От калорийности суточного пищевого рациона жиры должны составлять 30%. Сколько калорий должен получить человек за счет жиров, если калорийность рациона равна 2200 ккал? Сколько жиров должен получить человек за сутки, если при окислении 1г жира образуется 9,3 ккал?

12.67. От калорийности суточного пищевого рациона белки должны составлять 16 %. Сколько калорий должен получить человек за счет белков, если калорийность рациона равна а) 2300, б) 2400, в) 2500 ккал? Сколько белков должен получить человек за сутки, если при окислении 1г белков образуется 4,1 ккал?

12.68. От калорийности суточного пищевого рациона жиры должны составлять 25%. Сколько калорий должен получить человек за счет жиров,

если калорийность рациона равна а) 1900, б) 2300, в) 2400, г) 2500 ккал?

12.69. От калорийности суточного пищевого рациона жиры должны составлять 28%. Сколько калорий должен получить человек за счет жиров, если калорийность рациона равна а) 2100, б) 2200, в) 2300 ккал? Сколько жиров должен получить человек за сутки, если при окислении 1г жира образуется 9,3 ккал?

12.70. От калорийности суточного пищевого рациона углеводы должны составлять 55%. Сколько калорий должен получить человек за счет углеводов, если калорийность рациона равна 2200, 2300, 2400, 2500 ккал? Сколько углеводов должен получить человек за сутки, если при окислении 1грамм углеводов образуется 4,1 ккал?

12.71. В твердом сыре содержится 40% жира. Сколько жира получит человек, если он съест а) 30 г, б) 35 г, в) 45 г, г) 50 г такого сыра?

12.72. Какое количество твердого сыра должно быть в рационе человека, чтобы получить а) 15 г, б) 20 г, в)25 г, г) 30 г жира, если содержание жира в сыре 40%?

12.73. В хлебе содержится 8% белков. Сколько белков из хлеба получит человек, если в его суточном пищевом рационе а) 25 г, б) 75 г, в) 175 г хлеба?

12.74. На сколько грамм жира больше содержится в а) 40 г, б) 50 г 20% сметаны, чем в таком же количестве 15% сметаны?

12.75. Пульс человека в покое был равен 68 ударов в 1 минуту. После физической нагрузки пульс стал равен 82 удара в 1 минуту. На сколько процентов увеличился у человека пульс после физической нагрузки?

12.76. Пульс человека после физической нагрузки увеличился на 45%. Чему равен пульс после физической нагрузки, если в покое он был равен 74 ударов в 1 минуту?

12.77. Пульс человека после физической нагрузки увеличился на 25%. Какой пульс был у человека в покое, если после физической нагрузки он стал равен 82 в 1 минуту?

12.78. Пульс человека после физической нагрузки увеличился на 45%. Какой пульс был у человека в покое, если после физической нагрузки он стал равен 90 в 1 минуту?

12.79. Теоретически идеальная масса тела человека равна 64 кг, а он весит 82 килограмм. На сколько процентов человек весит больше своей теоретически идеальной массы?

12.80. Теоретически идеальная масса тела человека равна 68 кг, а он весит 86 кг. На сколько процентов человек весит больше своей теоретически идеальной массы?

12.81. Рассчитайте теоретически идеальную массу тела человека, если он весит 88 кг, что на 17% больше, чем его теоретически идеальная масса тела.

12.82. Вычислить массу сердца новорожденного ребенка, если его вес 2 кг 900 г, а масса сердца составляет 0,66% от массы тела.

13. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала

Актуальность темы

В этом разделе рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации, где необходимо применение математических методов:

- составление и решение пропорции;
- оценка пропорциональности развития ребенка с использованием антропометрических индексов;
- расчет необходимого количества молока для питания новорожденных объемным и калорийным методами;
- расчет цены деления шкал;
- расчет требуемого количества препарата;
- разведение антибиотиков;
- расчет скорости инфузии и др.

Цели занятия

Обучающийся должен уметь:

- решать задачи, используя формулы профессиональной деятельности.

Обучающийся должен знать:

- меры массы, объема, длины;
- формулы расчета прибавки массы и роста;
- определение цены деления шкалы;
- методы расчета требуемого количества препарата;
- жизненная емкость легких.
- формулу расчета скорости инфузии;
- правила разведения антибиотиков.

Ключевые понятия и формулы

Метрическая система единиц

Основные метрические единицы:

грамм (г) – мера массы

метр (м) – мера длины,

литр (л) – мера объема

производная единица	значение
микрограмм (мкг)	0,000001 г
миллиграмм (мг)	0,001 г
сантиграмм (сг)	0,01 г
дециграмм (дг)	0,1 г
декаграмм (даг)	10 г
гектограмм (гг)	100 г
килограмм (кг)	1000 г

производная единица	значение
дециметр (дм)	0,1 м
сантиметр (см)	0,01 м
миллиметр (мм)	0,001 м
микрометр (мкм)	0,000001 м

Приставка	коэффициент	обозначение	пример
Дека -	10	да...	$2\ даг = 2 \cdot 10 = 20\ г$
Гекто-	100	г...	$3\ гл = 3 \cdot 100 = 300 л$
Кило-	1000	к…	$4\ кг = 4 \cdot 1000 = 4000\ г$
Деци-	0,1	д…	$5\ дг = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5\ г$
Санти-	0,01	с…	$6\ сл = 6 \cdot 0{,}01 = 0{,}06\ л$
Милли-	0,001	м…	$8\ мг = 8 \cdot 0{,}001 = 0{,}008\ г$
Микро-	0,000 001	мк…	$9\ мкм = 9 \cdot 0{,}000\ 001 = 0{,}000\ 009\ м$
Нано-	0,000 000 001	н…	$8\ 000\ нм =$ $= 8000 \cdot 0{,}000\ 000\ 001 = 0{,}000008\ м$

Математика в педиатрии

Долженствующий вес детей до года:

$$m = m_{при\ рождении} + \textit{месячные прибавки} \qquad (12.1)$$

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
прибавка (г)	600	800	800	750	700	650	600	550	500	450	400	350
Всего прибавка	600	1400	2200	2950	3650	4300	4900	5450	5950	6400	6800	7150

Долженствующий вес у детей старше 1 года:

$$ДВ = 10{,}5 + 2n \text{ (кг)}, \qquad \text{n – число лет после года}$$

Где 10,5 кг – средний вес ребенка в 1 год, 2 кг - среднестатистическая прибавка в весе за 1 год. **(12.2)**

Долженствующий вес ребёнка после 10 лет:

$$ДВ = 30 + 4(n - 10), \qquad \text{n – число лет после года} \qquad \textbf{(12.3)}$$

Долженствующий рост детей до года:

$$ДР = l_{при\ рождении} + прирост\ (см) \qquad \textbf{(12.4)}$$

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
прирост (см)	3	3	3	2,5	2,5	2,5	1,5	1,5	1,5	1	1	1
Всего прибавка	3	6	9	11,5	14	16,5	18	19,5	21	22	23	24

Долженствующий рост детей от 1 года до 10 лет

$$ДР = 75 + 5n \text{ (см)}, \qquad n \text{ – число лет после года} \qquad \textbf{(12.5)}$$

где 75 (см) – средний рост ребенка в 1 год, 5 (см) – среднестатистическая прибавка роста за 1 год

Расчет питания (объемный способ)

Суточное количество молока от 0 до 10-14 дней жизни можно рассчитать:

- по формуле Зайцевой Г.И.:

  суточное количество молока $=$
  2% *от массы ребенка при рождении* $\times$ *n, n – дни жизни ребенка;* **(12.6)**

- по формуле Финкельштейна: *суточное количество молока (мл)*:

$$V = 70 \cdot n \quad \text{(при массе тела ниже 3200 г)} \qquad \textbf{(12.7)}$$

$$V = 80 \cdot n \quad \text{(при массе тела выше 3200 г)}, \qquad \textbf{(12.8)}$$

где n – дни жизни ребёнка.

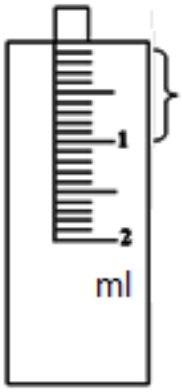
Для определения разовой потребности в пище суточный объём пищи делят на число кормлений.

Суточный объем питания ребенка до 1 года составляет:

Возраст (мес)	Доля от массы тела ребенка
до 2-х мес.	1/5
2 – 4	1/6
4 – 6	1/7
>6	1/8
После 6 мес. суточный объем не более 1 литра	

Расчет питания (калорийный способ)

Возраст (мес.)	Потребность в ккал/кг в сутки
до 3-х мес.	*120*
4 – 6	*115*
7 – 9	*110*
10 – 12	*100*
1 литр женского молока содержит около 700 ккал.	



Определение цены деления шприца

1. Найдите на цилиндре ближайшую к подыгольному конусу цифру, указывающую количество мл;

2. определить число делений на цилиндре между этой цифрой и подыгольным конусом;

3. разделить ближайшую к подыгольному конусу цифру на число делений.

Это и будет «цена» деления шприца.

Разведение антибиотиков

«Полное» разведение - такое разведение, при котором в 1 мл полученного раствора будет содержаться 100 тыс. ЕД антибиотика.

«Половинное» разведение - такое разведение, при котором в 1 мл раствора будет содержаться 200 тыс. ЕД антибиотика.

Скорость инфузии в каплях/мин.

$$\frac{\text{объем инфузии (мл)}}{\text{время (час)}} \times \frac{\text{кол} - \text{во капель, дозируемое системой } (\frac{\text{кап}}{\text{мл}})}{60 \text{ мин}} \qquad \textbf{(12.9)}$$

Вычисление площадей, объемов тел

Трубчатая кость имеет форму цилиндра, сердце – мышечный орган конусовидной формы, следовательно для вычисления площади поверхности и объема можно воспользоваться соответствующими геометрическими формулами.

Цилиндр:

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi Rh$ **(12.10)**

Площадь полной поверхности: $S_{полн.пов.} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ **(12.11)**

Объем $V = \pi R^2 h$ **(12.12)**

Конус

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \pi R l$ **(12.13)**

Площадь полной поверхности: $S_{полн.пов.} = \pi R l + \pi R^2$ **(12.14)**

Объем: $V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 h$ **(12.15)**

Газообмен в легких

Жизненная емкость легких (ЖЕЛ) – это объем воздуха, выдохнутого из легких после максимального вдоха при максимальном выдохе:

$$\text{ЖЕЛ} = \text{ДО} + \text{РОвд} + \text{РОвыд} \quad \textbf{(12.16)}$$

ДО - дыхательный объем (0,5 л)

$РО_{вд}$ - резервный объем вдоха (1,5 л)

$РО_{выд}$ - резервный объем выдоха (1,5 л)

ЖЕЛ составляет у мужчин 3,5 - 5,0 л, у женщин – 3,0 - 4,0 л

Количественной характеристикой легочной вентиляции служит минутный объем дыхания (МОД) – объем воздуха, проходящий через легкие за 1 минуту. При относительном покое взрослый человек совершает примерно 16 дыхательных движений в 1 минуту, а объем выдыхаемого воздуха – около 500 мл.

Минутный объем дыхания (МОД):

$$МОД = ЧД \cdot ДО \quad \textbf{(12.17)}$$

ЧД – частота дыхания в минуту

ДО – дыхательный объем воздуха

Содержание кислорода и углекислого газа во вдыхаемом/выдыхаемом воздухе:

	Кислород	Углекислый газ
Во вдыхаемом воздухе	20,97%	0,03%
В выдыхаемом воздухе	16%	4%

Предполагаемая масса плода считается по формуле Жордания

$$\text{Масса плода} = \text{Окружность живота} \times \text{Высота стояния дна матки} \quad \textbf{(12.18)}$$

Оценки индивидуального здоровья

Идеальная масса тела человека

<u>I Способ:</u>

$$ИМ_{мужчин} = (рост - 100) - (рост - 100) \cdot 0{,}1$$
$$ИМ_{женщин} = (рост - 100) - (рост - 100) \cdot 0{,}15 \quad \textbf{(12.19)}$$

<u>II Способ:</u>

Индекс КЕТЛЕ (ИНДЕКС МАССЫ ТЕЛА)

$$ИМТ = \frac{масса\ тела\ (кг)}{рост^2\ (м^2)} \qquad \textbf{(12.20)}$$

Тип телосложения	Индекс массы тела
Дефицит массы тела	< 20
Нормальное	20 – 24,9
Избыточное питание	25 – 29,9
Ожирение I степени	30 – 34,9
Ожирение II степени	35 – 39
Ожирение III степени	> 39

Если реальная масса тела пациента превышает нормальную, необходимо рассчитать на сколько процентов, чтобы определить степень ожирения.

Определение типа телосложения и суточной потребности в энергии

Тип телосложения	% отклонения массы тела от идеальной	Суточная потребность в энергии (в ккал/кг массы тела)
Худой	Дефицит 5% и более	25
Нормальное	Избыток до 10%	20
Ожирение I, II степени	Избыток 11- 49%	17
Ожирение III степени	Избыток 50% и более	15

Расчет необходимой энергии с учетом энергозатрат на трудовую деятельность в течение одних суток

Группа	Характер трудовой деятельности	Общее количество энергии, необходимой в сутки (ккал)
1	Очень лёгкая	$A + \frac{1}{6}A$
2	Лёгкая	$A + \frac{1}{3}A$
3	Среднетяжёлая	$A + \frac{1}{2}A$
4	Тяжёлая	$A + \frac{2}{3}A$
5	Очень тяжёлая	2А

1 группа — работники умственного труда (административно-управленческий аппарат, бухгалтерские, научные работники, врачи нехирургического профиля и др.)

2 группа — работники, занятые лёгким физическим трудом (работники сферы обслуживания, медсестры, санитары, швеи, агрономы, домохозяйки и др.)

3 группа — станочники, слесари, хирурги, работники коммунально-бытового обслуживания.

4 группа — строительные рабочие, металлурги, рабочие деревообрабатывающей, нефтяной, газовой промышленности, механизаторы сельского хозяйства и др.

5 группа — каменщики, землекопы, бетонщики, грузчики и др.

Проверь себя

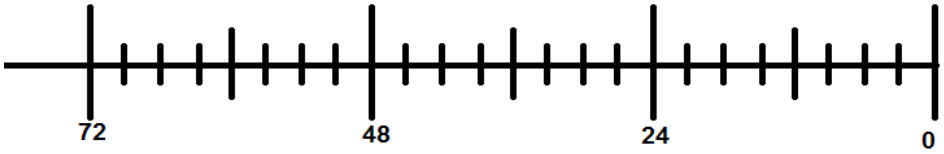
1. Укажите *неверное* утверждение
   1) 1г = 1000 мг
   2) 1г = 100сг
   3) 1г = 0,01 кг
   4) 1г = 10дг

2. Среднестатистически за 6 месяцев жизни ребенок до 1 года прибавит:
   1) в весе – 650 г, в росте – 2,5 см;
   2) в весе – 4300 г, в росте – 16,5 см;
   3) в весе – 3650 г, в росте –14 см;
   4) в весе – 4900 г, в росте –18см.

3. Вес ребенка составляет 3400г. На 10 день жизни по формуле Г.И. Зайцевой суточное количество молока составит
   1) 68 мл
   2) 680 мл
   3) 800 мл
   4) 80 мл

4. Вес ребенка в 7 месяцев составляет 8кг 400г. Суточный объем кормления и энергетическая потребность составляют
   1) 1050 г, 110 ккал/кг;
   2) не более 1л, 110 ккал/сут;
   3) 1050 г, 115 ккал/сут;
   4) не более 1000 г, 110ккал/кг.

5. Определите цену деления шкалы



   1) 24 ед;
   2) 12 ед;
   3) 3 ед;
   4) 8 ед.

6. Во флаконе 1 млн ЕД антибиотика. Сколько потребуется растворителя при условии полного разведения? Укажите верную запись пропорции для решения задачи:

   1) 1 мл – 1000 000 ЕД
      х мл – 100 000 ЕД
   2) 1 мл – 100 000 ЕД
      х мл – 1 000 000 ЕД
   3) 1 мл – 100 000 ЕД
      1 000 000 ЕД – х мл
   4) 100 000 ЕД – 1 мл
      х мл – 1 000 000 ЕД

7. Индекс массы тела человека составляет 26, тогда тип телосложения
   1) дефицит массы;
   2) нормальный;
   3) избыточный вес;
   4) ожирение.

8. Для оценки индивидуального здоровья измерен вес мужчины, он составил 85 кг. Идеальная масса тела должна быть 70 кг. Процент отклонения массы тела от идеальной равен
   1) 87,5%
   2) 14%
   3) 1,2%
   4) 15%

9. Врач назначил лекарственный препарат с дозировкой 0,25 г внутримышечно 2 раза в сутки. Имеется данный лекарственный препарат, на упаковке которого указано 0,5 г/мл. Сколько мл раствора составляет разовое применение? Укажите верную запись пропорции для решения задачи:

   1) 1 мл – 500 мг
      х мл – 250 мг
   2) 1 мл – 0,25 г
      х мл – 0,5 г
   3) 1 мл – 250 мг
      500 мг – х мл
   4) 500 мг – 1 мл
      х мл – 250 мг

10. Имеются ампулы по 5 мл с лекарственным препаратом в растворе 2%. Сколько раствора наберет в шприц медсестра, если врач назначил препарат по 0,05г
    1) 2,5 мл
    2) 1 мл
    3) 10 мл
    4) 0,5 мл

Вопросы и задания для подготовки к занятию

1. Формулы для расчета прибавки роста и массы детей.
2. Формула для расчета питания (объемный способ)
3. Формула для расчета требуемого количества препарата.
4. Формула для подсчета скорости внутривенного введения лекарств в кап/мин.
5. «Полное» и «половинное» разведение антибиотиков.
6. Формулы расчета идеальной массы тела, индекса массы тела. Система оценки типа телосложения.
7. Выполните задания:
   1) Приведите примеры препаратов, имеющих разные лекарственные формы и различные дозировки. Оформите таблицу, например:

Наименование	Лекарственная форма	Дозировка
Парацетамол	Таблетка	500 мг, 200 мг
	Сироп	120 мг/5мл
	Свечи	0,125; 0,25; 0,5 и 1,0 г.
…		

   2) Для своих показателей массы тела и роста рассчитайте индекс Кетле и идеальную массу тела.
   3) Определите процент отклонения реальной массы от идеальной массы тела, тип Вашего телосложения и суточную потребность энергии с учетом энергозатрат.
   4) В программе MS Excel спроектируйте расчет идеальной массы тела и расчета суточной потребности в энергии с учетом энергозатрат на трудовую деятельность.
   5) В программе MS Excel спроектируйте расчет необходимого количества лекарственного препарата.

Рейтинг занятия

Критерии оценки	Макс. балл
1. Домашняя самостоятельная работа.	2
2. Входной контроль.	5
3. Проверочная работа.	5
Итого	12

11-12 баллов «5»; 8-10 баллов «4»; 6-7 баллов «3»

Практические задания

Математические методы в педиатрии

13.1. Рассчитайте рост ребенка в 5 месяцев, если при рождении он имел рост 50см.

13.2. Рассчитайте рост ребенка в 8 месяцев, если при рождении он имел рост 53см.

13.3. Рассчитайте рост ребенка в 2 года.

13.4. Рассчитайте прибавку роста ребенка с 10 месяцев до 2 лет, если при рождении он имел рост 48 см.

13.5. Рассчитайте прибавку роста ребенка с 4-х до 7-ти лет.

13.6. При рождении вес ребенка был 2 кг 800 г. Каким будет его вес к 6 месяцам?

13.7. Рассчитайте долженствующий вес ребенка в 9 месяцев, если он родился весом 3400 г, а ежемесячно он набирал в весе согласно табличным данным.

13.8. До 4 месяцев ребенок, родившийся с весом 3,2 кг, прибавлял в весе согласно табличным данным, а за 4-й, 5-й месяцы набирал всего по 600 г. Какой вес имел ребенок в 5 месяцев?

13.9. За первые 3 месяца жизни ребенок набрал 2,1 кг. Сколько весил ребенок в 7 месяцев, если он родился с весом 2,9 кг и за последние месяцы жизни прибавил в весе среднестатистическое значение?

13.10. Сколько весит ребенок в 11 месяцев жизни, родившийся с весом 3кг 200г, если известно, что за последние 5 месяцев он набрал в весе 2,2 кг, а остальные месяцы набирал в весе согласно таблице?

13.11. Рассчитайте долженствующую массу тела ребенка в 14 лет.

13.12. Какое количество молока в сутки должен получать 2-х месячный ребенок весом 4,7 кг. Произвести расчет калорийным методом.

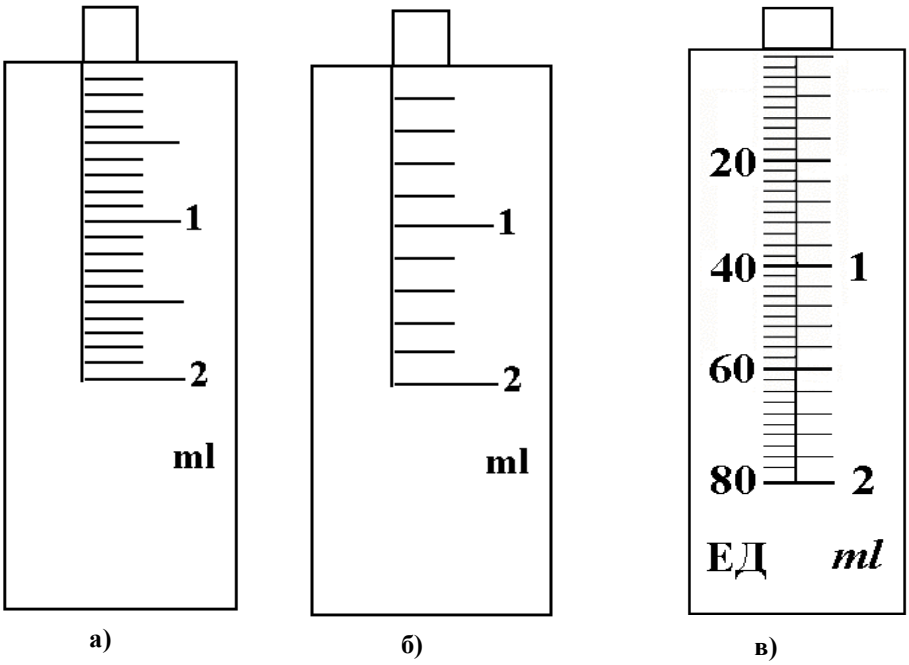
13.13. Ребёнок в возрасте 2 месяца имеет массу тела 4 кг. Какой объём пищи потребуется ему в сутки, если 1 литр женского молока содержит 700 ккал?

13.14. Рассчитайте количество молока, необходимое на сутки, по формуле Финкельштейна для доношенного 7-дневнего ребенка массой 3400 г. Определите объем молока для каждого кормления (при 7-разовом режиме).

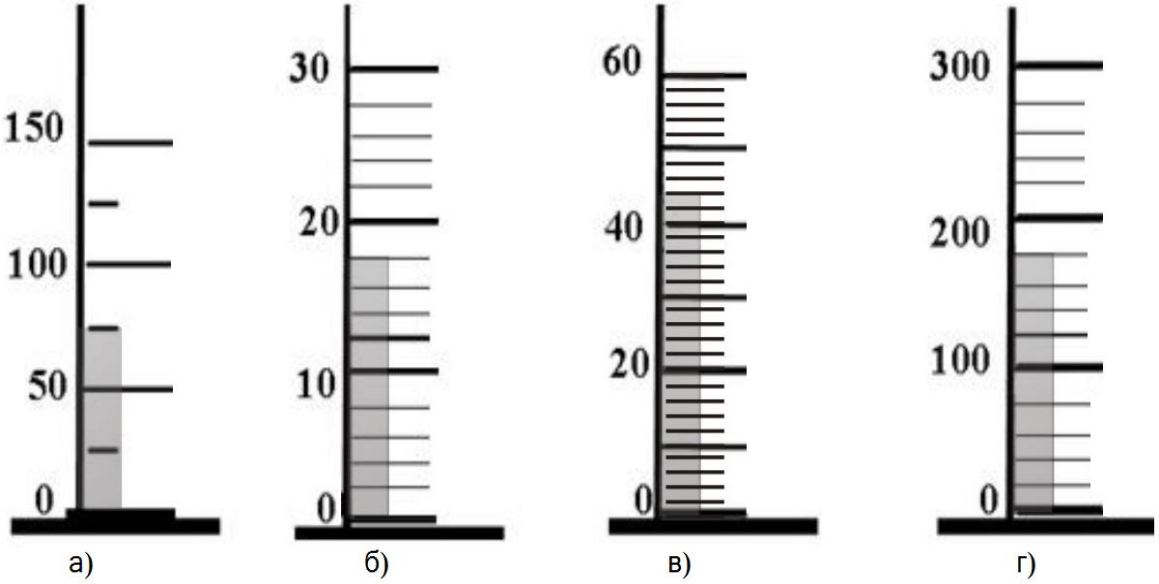
13.15. Рассчитайте количество молока, необходимое на сутки ребенку 3 месяца жизни, массой 4800 г, калорийным методом.

Определение цены деления шкалы

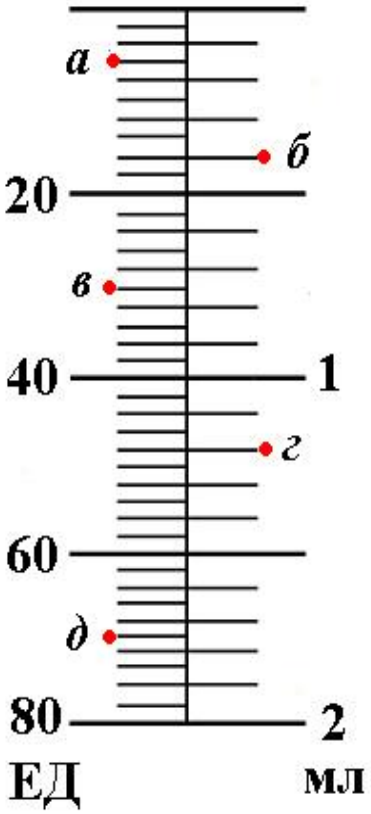
13.16. Определите цену деления данных шприцев



13.17. Определите цену деления данных шкал и показания:



13.18. Укажите значения единиц инсулина напротив каждой буквы



13.19. Определите цену деления каждого шприца

Разведение антибиотиков

13.20. Врач назначил ребенку 400 тыс. ЕД пенициллина при полном разведении. Во флаконе 600 тыс. ЕД пенициллина. Сколько мл растворителя требуется для разведения и сколько мл раствора пенициллина в шприц для инъекций?

13.21. На одну инъекцию требуется 300 000 ЕД пенициллина. Имеется: во флаконе 500 000 ЕД. Сколько мл новокаина нужно брать для разведения и сколько мл раствора в шприц для инъекций: а) при полном разведении; б) при половинном разведении?

13.22. На одну инъекцию требуется 500 000 ЕД антибиотика. Имеется: во флаконе 1 000 000 ЕД антибиотика. Сколько мл стерильной воды нужно брать для разведения и сколько мл раствора в шприц для инъекций: а) при полном разведении; б) при половинном разведении?

Расчет скорости инфузии

13.23. Назначение врача: 1л 5% раствор глюкозы внутривенно капельно в течение 12 часов. Капельница дозирует 10 капель/мл. Подсчитайте скорость инфузии в каплях/мин.

13.24. Назначение врача: 5% раствор глюкозы внутривенно капельно со скоростью 120 мл/час в течение следующих 10 часов. Капельница дозирует 15 капель/мл. Подсчитайте скорость инфузии в каплях/мин.

13.25. Пациенту назначено введение 2,4 л раствора внутривенно в сутки. Рассчитайте скорость инфузии, если известно, что 1 мл жидкости равен 20 каплям?

13.26. Больному назначено введение 0,4 л гемодеза внутривенно капельно на 2 часа. Рассчитайте скорость инфузии, если 1 мл жидкости равен 15 каплям.

13.27. Врач назначил 0,8 л раствора Рингера внутривенно капельно в течение 3 часов. Рассчитайте скорость инфузии, если известно, что капельница дозирует 15 капель/мл.

13.28. Сколько мл жидкости перелили внутривенно капельно больному за 8 часов, если скорость введения раствора была 75 кап./мин., капельница дозировала 10 кап./мл.

13.29. Сколько мл жидкости перелили внутривенно капельно больному за сутки, если скорость введения раствора была 30 кап./мин., капельница дозировала 15 кап./мл.

Расчет требуемого количества лекарства

13.30. Назначение врача: флемоксин по 0,5 г 2 раза в день. Имеются: капсулы флемоксина по 500 мг. Сколько капсул составляет разовый прием?

13.31. Назначение врача: бисептол 0,12г внутрь 3 раза в день. Имеются: таблетки бисептола по 240 мг. Сколько таблеток составляет разовый прием?

13.32. Назначение врача: аспирин по 0,65 г внутрь, каждые 6 часов. Имеются: таблетки аспирина по 325 мг.

13.33. Врач назначил эритромицин 400 мг внутрь каждые 6 часов. Имеются таблетки эритромицина по 0,2 г. Сколько таблеток составляет 1 прием?

13.34. Назначение врача: рулид по 0,15г 3 раза в день. Имеются таблетки рулида по 100 мг. Сколько таблеток медсестра должна давать больному на один прием?

13.35. Назначение врача: 2г лекарственного средства в виде микстуры. Имеется: микстура, 2мл которой содержат 1000 мг препарата. Сколько мл составляет разовый прием?

13.36. Рассчитать разовую и суточную дозы магния сульфата, выписанного взрослому как желчегонное средство в 20% растворе и назначенного по 1 столовой ложке 3 раза в день (1 ст.л. – 15 мл).

13.37. Определить курсовую дозу настойки валерианы, назначенной по 30 капель на ночь в течение 25 дней (1 мл – 50 капель).

13.38. Назначение врача: морфин по 15 мг внутримышечно каждые 4 часа при болях. Имеется: морфин во флаконах по 10мг/ мл (указано количество препарата в 1 мл раствора). Сколько мл раствора медсестра должна набрать в шприц для инъекций?

13.39. При отеке головного мозга врач назначил преднизолон 60 мг внутримышечно 3 раза в день. Имеется раствор преднизолона по 30 мг/мл. Сколько мл составляет разовый прием?

13.40. Назначение врача: адреналин по 0,5 мг внутримышечно 4 раза в день. Имеются ампулы адреналина 0,1% по 1 мл. Сколько мл раствора должна набрать в шприц медсестра?

13.41. Лазикс 30 мг внутримышечно немедленно. Имеется ампула 2 мл – в ампуле 20 мг. Сколько мл лазикса нужно набрать в шприц для инъекций?

13.42. Рассчитать количество капсул оксациллина натриевой соли на 7 дней лечения раневой инфекции, если суточная доза составляет 1 г., содержимое одной капсулы – 0,25 г.

13.43. Рассчитать количество таблеток амоксициллина на 7 дней лечения ангины, если суточная доза составляет 1,5 г в три приёма, доза одной таблетки – 0,25 г.

13.44. Рассчитать разовую и суточную дозы 3% раствора натрия бромида назначенного больному неврозом в объёме 200 мл по 1 столовой ложке 3 раза в день (1 ст.л. – 15 мл). Определить на сколько приёмов и дней лечения хватит больному данного раствора.

13.45. Врач назначил по одной чайной ложке раствора калия бромида 3 раза в день на 4 дня (1 ч.л. – 5 мл). Определите концентрацию калия бромида и объем раствора, если больной должен получать по 0,05 г препарата на один приём.

13.46. Рассчитайте необходимое количество единиц инсулина при условии, что 1 ЕД расщепляет 4 г сахара, если:

а) введено 600 мл 20% глюкозы;
б) введено 400 мл 25% глюкозы;
в) введено 300 мл 40% глюкозы;
г) введено 1,6 л 5% глюкозы.

13.47. Введено 400мл 15% раствора глюкозы. Сколько единиц инсулина нужно ввести пациенту для исключения метаболических процессов в организме, если известно, что 1 ЕД инсулина расщепляет примерно 4 г сахара?

13.48. Сколько единиц инсулина нужно ввести пациенту для исключения метаболических процессов в организме, если введено 700 мл 20% раствора глюкозы? Известно, что 1 ЕД инсулина расщепляет примерно 5 г сахара.

13.49. Сколько ЕД инсулина нужно ввести больному для исключения метаболических процессов в организме, если ему введено 400 мл 40% глюкозы? 1ЕД инсулина расщепляет ≈4 г сахара.

13.50. Больному вводили глюкозу, затем сделали инъекцию инсулина – 5 ЕД. Сколько 40% глюкозы было ранее введено больному, если 1ЕД инсулина расщепляет ≈4 г сахара.

13.51. Назначение врача: эуфиллин 150 мг внутривенно. Имеются ампулы 2,4% раствора эуфиллина по 10мл. Сколько мл раствора должна набрать в шприц медсестра?

13.52. Ребенку 5 лет врач назначил пипольфен 25 мг внутримышечно 4 раза в день. Имеются ампулы 2,5% раствора по 2 мл. Сколько мл составляет разовый прием? Соответствует ли назначенная доза норме, если в аннотации указано, что доза для детей 0,1 мл/год жизни.

13.53. Назначение врача: парацетамол внутрь в суспензии 270 мг каждые 6 часов. В аннотации указано:

- 0,9 мл препарата содержат 80 мг парацетамола;
- стандартная доза для детей составляет от 10 до 15 мг/кг каждые 4-6 часов. Вес ребенка 9 кг.

Найдите сколько мл составляет разовый прием? Соответствует ли назначенная доза норме?

13.54. Назначение врача: ампициллин внутрь в суспензии 225 мг каждые 6 часов. Имеется суспензия ампициллина для применения внутрь. В аннотации указано:

- 250 мг ампициллина на 5 мл;
- стандартная доза для детей составляет от 25 до 100 мг/кг/сут 4 раза в сутки. Вес ребенка 15 кг.

Найдите сколько мл суспензии ребенку должна давать медсестра. Соответствует ли назначенная доза норме?

13.55. Ребенку 4 лет весом 18 кг врач назначил ампиокс по 500 мг 3 раза в день. В аннотации указано:

- ампиокс в капсулах по 0, 25 г;
- стандартная доза детям от 3 до 7 лет составляет 50 - 70 мг/кг/сут. каждые 8 часов.

Определите разовое количество капсул ампиокса. Соответствует ли назначенная доза норме?

13.56. Назначение: витамин В6 в растворе 0,5% по чайной ложке (5 мл) 2 раз в день. Имеется: ампулы 1 мл 5% раствора витамина В6. Сколько мл составляет разовая порция витамина В6.

13.57. Пациенту весом 75 кг проводится внутривенный наркоз кетамином. Доза кетамина для внутривенного введения 2 мг/кг, препарат выпускается в виде 5% раствора. Сколько мл кетамина медсестра наберет в шприц?

13.58. Беременной весом 80 кг, проводится сон-отдых с помощью внутривенно-капельного введения оксибутирата натрия. Известно, что для беременных женщин и ослабленных больных назначают 0,7 г на 10 кг веса. Форма выпуска препарата 20% -10 мл. Сколько ампул оксибутирата натрия потребуется для этой цели?

13.59. Медсестра набрала 50 мг прокариума. Сколько ампул прокариума она использовала, если известно, что препарат выпускается в ампулах 1% – 2,5 мл?

13.60. Пациенту отделения реанимации весом 100 кг с целью адаптации к искусственной вентиляции легких внутривенно капельно вводят ГОМК. Известно, что доза ГОМКа 1 г на 10 кг веса. Форма выпуска препарата 20% – 10 мл. Сколько ампул препарата требуется для этой цели?

13.61. Вам необходимо приготовить 20 мл 2% раствора тиопентала натрия. Вы, имея флакон тиопентала натрия содержащий 1 г сухого порошка, развели его в 10 мл изотонического раствора NaCl и получили основной раствор. Каким образом Вы решите поставленную задачу, используя основной раствор и изотонический раствор NaCl?

13.62. При реанимации назначают 0,02 мг/кг адреналина. Имеются ампулы адреналина 0,1% раствора по 1 мл. Сколько мл препарата медсестра должна набрать в шприц и сколько ампул адреналина потребуется для пациента весом 70 кг?

13.63. Медсестра набрала 40 мг лазикса. Сколько ампул лазикса она использовала, если известно, что препарат выпускается в ампулах 1% – 2 мл?

13.64. Больному назначили 480 мг эуфиллина при приступах бронхиальной астмы. Имеются ампулы 2,4% раствора по 10 мл. Сколько мл медсестра должна набрать в шприц. Сколько ампул требуется?

13.65. Назначение: лекарственный препарат в растворе 0,5% по 5 мл 2 раза в день. Имеется: ампулы 1 мл 5% раствора данного лекарственного препарата. Рассчитайте разовое применение имеющегося раствора (в мл).

13.66. Врач назначил раствор кальция хлорида по 1 ст. ложке 4 раза в день (1 ст л. = 15 мл) в течение 5 дней. Найдите объем раствора и его концентрацию в процентах, если разовая доза составляет 1,5 г кальция хлорида.

13.67. Врач назначил раствор натрия бромида с таким расчетом, чтобы, принимая по 1 ст. ложке больной получал на прием 0,15 г натрия бромида. Найдите концентрацию раствора в процентах и его объем, если раствор следует принимать 4 раза в день в течение 4 дней. (1 ст л. = 15 мл).

Вычисление площадей и объемов тел

13.68. Вычислить объем сердца взрослого человека, если его длина h = 14 см, а поперечный разрез d = 9 см.

13.69. Трубчатая кость имеет длину h = 20 см, диаметр d = 3 см. Вычислить объем кости и площадь ее боковой поверхности.

13.70. Вычислить объем сердца взрослого человека, если его длина h = 14 см, а поперечный разрез d = 10 см.

13.71. Вычислить объем сердца взрослого человека, если h =15 см, d = 8 см.

13.72. Кость голени человека имеет длину h = 38 см., ширину d = 5 см. Вычислить объем и площадь боковой поверхности кости.

13.73. Трахея имеет форму трубки длиной h = 8 см., диаметром d = 1,5 см. Вычислить максимальный объем трахеи.

13.74. Вычислить объем спинномозговой жидкости в спинномозговом канале, если его длина h = 40 см., диаметр d = 1,4 см.

Газообмен легких

13.75. Человек при спокойном дыхании делает 16 дыхательных движений в минуту. При физической нагрузке количество дыхательных движений увеличивается на 50%. Сколько углекислого газа при физической нагрузке выдохнул человек за 4 минуты?

13.76. В течение 1 минуты человек делает 16 дыхательных движений, при этом в легкие поступает за 1 вдох 1500 см3 воздуха. Какова минутная вентиляция легких?

13.77. Рассчитайте долженствующую жизненную емкость легких ребенка 15 лет, если дыхательный объем составляет 400 мл, резервный объем вдоха – 1,4 л, резервный объем вдоха – 900 мл.

13.78. Рассчитайте долженствующий минутный объем дыхания ребенка 14 лет, если дыхательный объем составляет 400 мл, частота дыхания – 19 в минуту.

Математические методы в акушерстве

13.79. Окружность живота беременной 100 см, высота стояния дна матки 34 см. Рассчитать предполагаемую массу плода по формуле Жордания.

13.80. Окружность живота беременной 110 см, высота стояния дна матки 28 см. Рассчитать предполагаемую массу плода по формуле Жордания.

13.81. Окружность живота беременной 95 см, высота стояния дна матки 35 см. Рассчитать предполагаемую массу плода по формуле Жордания.

13.82. Вес четырёхмесячного плода равен 120 г, а вес семимесячного плода – 1100 г. Сколько процентов вес четырехмесячного плода составляет от веса семимесячного плода?

Математика в микробиологии

13.83. Вычислить объем бактерии, имеющей форму шара (на примере сине-зеленой водоросли), если её диаметр равен 2 мкм. ($V = Sh = \frac{4}{3}\pi R^3$)

13.84. Масса одной микробной клетки определяется в 0,00000000157 доли мг, масса же вирусной частички меньше микробной клетки в 1500 раз. Определите массу вирусной клетки.

13.85. Микробы, располагающиеся в пространстве до уборки помещения площадью 16 м^2, 2000000 на 1 м^2, после уборки 100000 на 1 м^2. Сколько всего находилось в помещении микробов до уборки и после? На сколько процентов помещение стало чище?

13.86. На поверхности кожи площадью 1 см^2 находится 5000 разнообразных вирусов и микробов. Вычислите сколько вирусов и микробов находится на 1 м^2 кожи?

13.87. В 1 м^3 воздуха содержится 7500 различных микроорганизмов. В каком объеме воздуха будет содержаться 7 500 000 микроорганизмов?

Основы индивидуального здоровья

13.88. Рассчитать индекс массы тела пациента весом – 94 кг при росте 165 см.

13.89. Рассчитать индекс массы тела пациента весом – 82 кг при росте 160 см.

13.90. Медсестра при росте 160 см весит 80 кг. Оценить ее массу тела. Определить суточную потребность пациента в энергии с учетом энергозатрат на трудовую деятельность.

13.91. Рассчитать индекс массы тела пациента весом – 90 кг при росте 175 см.

13.92. Хирург при росте 175 см весит 90 кг. Пользуясь таблицами оценить его массу тела и определить суточную потребность в энергии с учетом энергозатрат на трудовую деятельность.

13.93. Бухгалтер при росте 165 см весит 82 кг. Пользуясь таблицами оценить ее массу тела и определить суточную потребность в энергии с учетом энергозатрат на трудовую деятельность.

13.94. Соотношение белков, жиров и углеводов в суточном пищевом рационе должно быть 1:1:4. Сколько должен получить человек жиров и углеводов, если суточная потребность в белках составляет а) 70 г, б) 75г, в) 80г, г) 85 г?

13.95. Соотношение животных и растительных жиров в суточном пищевом рационе человека должно быть 2:1. Сколько должен получить человек растительных жиров, если суточная потребность в жирах: а) 80 г, б) 85 г, в) 90 г, г) 95 г?

13.96. В 100 граммах рыбы содержится 15 грамм белков. Сколько белков получит человек, если в его рационе содержится а) 60, б) 70, в) 85 г такой рыбы?

14. Матрицы, определители. Решение системы уравнения методом Крамера.

Изучите тему самостоятельно, выполните прилагаемые ниже практические задания.

Актуальность

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики - матричная алгебра - имеют чрезвычайно важное значение. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей записываются в достаточно простой, а главное - в компактной форме.

Необходимость введения определителя - числа, характеризующего квадратную матрицу А, - тесно связано с решением систем линейных уравнений.

К системам линейных уравнений приводит множество прикладных экономических задач.

Цели

Обучающийся должен уметь:

- записывать матрицы,
- выполнять действия с матрицами (суммирование, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование),
- вычислять определители матриц 2 и 3-го порядка,
- решать системы уравнений методом Крамера.

Обучающийся должен знать:

- понятие матрицы, определителя матрицы 2 и 3-го порядков,
- виды матриц,
- операции с матрицами,
- алгоритм решения систем уравнений методом Крамера.

Ключевые понятия и формулы

Матрицей размера $m \cdot n$ называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

содержащая m строк и n столбцов. Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: i – номер строки и k – номер столбца. Кратко матрицу обозначают $A = (a_{ik})_{m,n}$

Матрица называется ***квадратной*** порядка n, если она состоит из n строк, и n столбцов.

Матрица размера *1 ·n* называется ***матрицей-строкой***

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \dots \quad a_{1n})$$

Матрица размера *m·1* - ***матрицей-столбцом***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Нулевой матрицей заданного размера называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Треугольной матрицей *n-го* порядка называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Единичной называется квадратная матрица *n-го* порядка, у которой элементы главной диагонали равны единице, а в се остальные элементы – нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1\ 0 \dots 0 \\ 0\ 1 \dots 0 \\ \dots \\ 0\ 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы A = $(a_{ik})_{m,n}$ и B = $(в_{ik})_{m,n}$ называются ***равными***, если $a_{ik} = в_{ik}$ i = 1,…,m; k = 1,…,n.

Операции над матрицами.

Суммой матриц A = $(a_{ik})_{m,n}$ и B = $(в_{ik})_{m,n}$ называются матрица A + B = $(a_{ik} + в_{ik})_{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2n} \\ & \dots & \\ b_{m1} & b_{m2} \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A + B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12+}b_{12} \ \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы A = $(a_{ik})_{m,n}$ ***на число l*** называется матрица lA = $(la_{ik})_{m,n}$.

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\ a_{11} & l\ a_{12} \dots & l\ a_{1n} \\ l\ a_{21} & l\ a_{22} \dots & l\ a_{2n} \\ & \dots & \\ l\ a_{m1} & l\ a_{m2} \dots & l\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $2A$

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел l и m выполняются свойства:

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + 0 = A$
4) $l(mA) = (lm)A$
5) $l(A + B) = lA + lB$
6) $(l + m)A = lA + mA$

Транспонированной для матрицы А называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы А, а столбцы – строками матрицы А.

Пример

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Построить матрицу $C = 2A - 3B + A^T$

Решение:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \\ -6 & 2 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 \\ 0 & 15 & 9 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -14 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Произведением матрицы А = $(a_{ik})_{m,p}$ на матрицу В = $(в_{ik})_{p,n}$ называется матрица *D* размера $m \cdot n$ с элементами

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Иными словами, для получения элемента, стоящего в *i*-ой строке результирующей матрицы и в *k*-ом ее столбце, следует вычислить сумму попарных произведений элементов

i-ой строки матрицы А на *k*-ый столбец матрицы В.

Произведение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Это – условие согласования матриц при умножении. Если оно нарушено, матрицы перемножить нельзя. Поэтому возможна ситуация, когда произведение $A \cdot B$ существует, а произведение $B \cdot A$ – нет. Кроме того, когда существуют оба произведения, то чаще всего они не совпадают, т.е. в большинстве случаев произведение матриц некоммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) & 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 & -2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -17 & 3 \\ 5 & -12 & 0 \\ -5 & 22 & -6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 3 \\ 5 & -12 & 0 \\ -5 & 22 & -6 \end{pmatrix}$

Если A, B, C – квадратные матрицы одинакового порядка и E – единичная матрица того же размера, то справедливы тождества:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$ (E - единичная матрица)

Определители второго и более высоких порядков.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-го порядка.

Определителем 2-го порядка (матрицы а) называется число

$$\mathrm{D(A)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$D(A) = \begin{vmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = (-11) \cdot 12 - 4 \cdot 5 = -152$$

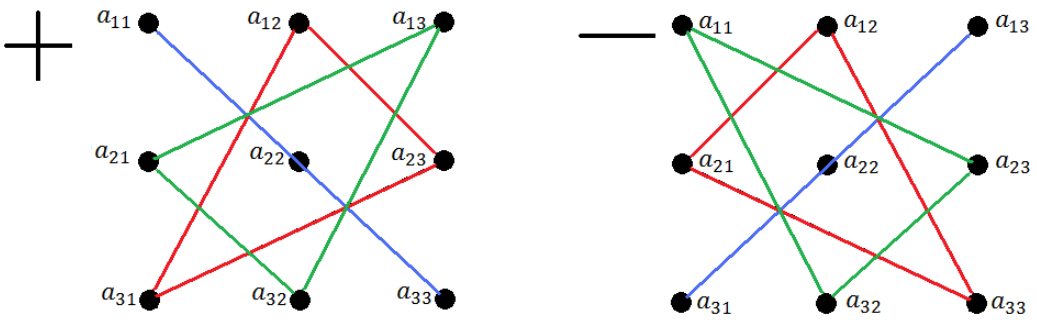
Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$- матрица 3-го порядка.

Определителем 3-го порядка (матрицы А) называется число

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Для удобства запоминания используйте Правило Саррюса (треугольника)



Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Решение:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 0 \cdot 7 + (-1) \cdot (-5) \cdot (-2) + 4 \cdot 6 \cdot 3 - (-2) \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot 7 - 6 \cdot (-5) \cdot 2 = 0 - 10 + 72 - 0 + 28 + 60 = 150$$

Решение системы уравнений методом Крамера

Разберем метод решения системы уравнений на примере.
Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение

1. Составим и найдем определить основной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 6 + 3 + 12 - 27 - 2 - 4 = -12$$

   Т.к. $\Delta \neq 0$, значит система имеет решение и оно единственное.

2. Составим и найдем определитель при замене первого столбца основной матрицы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 21 + 6 + 6 - 54 - 1 - 14 = -36$$

3. Составим и найдем определитель при замене второго столбца основной матрицы столбцом свободных членов

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 1$$
$$= 2 + 36 + 21 - 9 - 14 - 12 = 24$$

4. Составим и найдем определитель при замене третьего столбца основной матрицы столбцом свободных членов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 2\cdot 7 + 3\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 7 - 2\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot 2\cdot 1$$
$$= 36 + 28 + 3 - 63 - 12 - 4 = -12$$

5. По формулам Крамера запишем решение системы линейных уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-36}{-12} = 3;$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{-12} = -2;$$
$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 - 2; x_3 = 1.$

Практические задания

Найдите матрицу C

14.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = A + \mathrm{B}$

14.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{C} = 2A + B$

14.3. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, C = 5A - B$

14.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = 2A + 3B$

14.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = A \cdot B$

14.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, C = A \cdot B$

14.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = AB + BA$

14.8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, C = A^3$

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *Выполните вычисления и запишите матрицы:*

14.9. $2\mathrm{A} - 3\mathrm{B} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

14.10. $-2\mathrm{A} + \mathrm{B} + 2\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

14.11. $4\mathrm{A} + \mathrm{B} - 2\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

14.12. $-\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + 4\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

Вычислите определители матриц

14.13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

14.14. $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

14.15. $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

14.16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

14.17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

14.18. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

14.19. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

14.20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Решите системы уравнений методом Крамера

14.21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

14.22. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

14.23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

14.24. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

14.25. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

14.26. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

14.27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

14.28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

14.29. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

14.30. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

14.31. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

14.32. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

14.33. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

14.34. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

14.35. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

14.36. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

14.37. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

14.38. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

14.39. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

14.40. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

14.41. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

14.42. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

14.43. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

14.44. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

14.45. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

14.46. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

14.47. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -22 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

14.48. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

14.49. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

15. Итоговый контроль

Цели занятия:

Проверить и оценить уровень усвоения курса «Математика»

Форма проведения:

компьютерное тестирование по всем темам курса.

Критерии оценки

Для очного отделения (30 тестов)	Для очно-заочного отделения (20 тестов)
0-3 ошибок – «25»	0-2 ошибок – «25»
4-9 ошибок – «20»	3-6 ошибок – «20»
10-15 ошибок – «15»	7-10 ошибок – «15»
16 и более ошибок – «10»	11 и более ошибок – «10»

Задания для подготовки к итоговому контролю

1. Укажите пару $(x; y)$, находящуюся в отношении

   а) $y = 2 + x^2$. $(16; 4)$, $(4; 16), (1; 3), (2; 6)$

   б) $y = log_2 x$. $(16; 4)$, $(4; 16), (8; 3), (3; 8)$

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 9}$
3. Найдите точки пересечения графиков функций $y = x^3$ и $y = 2x^2$
4. Вычислите пределы функций:

   а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{x - 3}$

   б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{n + 2}\right)$

5. Найдите частичную сумму ряда S_4 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$
6. Найти скорость изменения функции $f(x) = \frac{x^5}{2x-1}$ при $x = 1$
7. Вычислите приближенное значение приращения функции $f(x) = \frac{x^5}{2x-1}$, если аргумент изменился от 1 до 1,003, используя понятие дифференциала.

8. Вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ при $x = 3{,}005$

9. К какому виду приведется интеграл $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$, если выполнить замену $t = cosx$

10. Вычислите интеграл а) $\int_1^2 (4x^3 + 2x + 1)dx$; б) $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})dx$

11. Найдите пересечение, объединение, разности множеств:
$A = \{5, 6, 8, 9, 10\}$, $B = \{x \in N | x \leq 8\}$

12. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x - x^2$, если $y(3) = 5$

13. Вычислите а)A_5^2, б) C_7^4

14. В урне 20 шаров, из которых 7 красных, а остальные белые. Наудачу вынули 4 шара. Какова вероятность, что среди них 2 красных и 2 белых?

15. С предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных. Для химического опыта требуется 3 пробирки. Найти вероятность того, что среди отобранных 3 пробирок а) 1 стандартная, б) 2 стандартные, в) хотя бы одна стандартная.

16. Были получены результаты контрольной работы студентов: 2, 5, 4, 5, 4, 3, 4, 2, 4, 5, 5, 4, 3, 3, 3 постройте статистический ряд, вычислите средний балл за контрольную работу, коэффициент вариации.

17. В населенном пункте 750 жителей, в том числе детей до 3 лет – 10. В отчетном году родилось 5 человек, умерло 12. Фельдшер ведет прием 3 часа в день. Число обращений на ФАП составило 1200, фельдшером выполнено 530 посещений на дому, из них 80 – к детям до 3 лет. Рассчитайте:
    а) коэффициент рождаемости
    б) коэффициент смертности
    в) нагрузку фельдшера в день
    г) нагрузку фельдшера в час
    д) число посещений на 1 жителя
    е) удельный вес посещений на дому
    ж) число посещений на дому в день
    з) среднее число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет

18. Представьте в виде отношения 0,5%, 0,04%

19. Сколько сухого вещества содержится в 200 мл 6% раствора?, в 150 мл 3% раствора?
20. Для приготовления раствора использовалось соотношение 5:250. Сколько раствора можно приготовить из 15 г вещества, из 20 г сухого вещества?
21. Назначение врача: прометазин по 0,05 г внутримышечно 2 раза в день. Имеются: ампулы по 2 мл, на которых указано, что 1 мл раствора содержит 25 мг прометазина. Рассчитайте разовое применение имеющегося раствора (в мл).
22. Рассчитайте скорость инфузии в кап/мин, если пациенту назначено введение 0,8 л раствора гемодеза внутривенно капельно в течение 3 часов. Известно, что 1 мл жидкости равен 10 каплям.
23. Врач назначил пенициллин по 200 тыс. ЕД при полном разведении. Сколько мл раствора антибиотика должна набрать в шприц медсестра?
24. Пациенту назначен лекарственный препарат дозировкой 0,25 г 3 раза в день в течение 10 дней. Имеется препарат дозировкой 0,5 г в упаковке по 10 таб. На сколько дней хватит 1 упаковки? Сколько упаковок препарата надо приобрести в аптеке?

Ответы:

1. а) (1;3), (2;6); б) (16;4), (8;3),
2. $D(y) = (-\infty;\ -3] \cup [3; +\infty)$
3. $(0; 0), (2; 8)$
4. а) ∞; б) 1
5. $\frac{298}{105}$
6. 3
7. 0,009
8. 5,009
9. $\int t^4 dt$
10. а) 19; б) $\frac{21}{8}$
11. $A \cap B = \{5, 6, 8\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5,\ 6, 7, 8, 9, 10\}$;
    $A \backslash B = \{9, 10\}$; $B \backslash A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

12. $y = x^2 - \frac{x^3}{3} + 5$

13. а) 20, б) 35

14. $P(A) = \frac{1638}{4845} \approx 0{,}3$

15. а) $\frac{8550}{1313400}$ б) $\frac{179550}{1313400}$ в) $\frac{8550+179550+1125180}{1313400} = \frac{1313280}{1313400}$

16. $\bar{x} = 3{,}7\ D(x) = 0{,}996, \sigma = 0{,}998\ Cv = 26{,}8$

17. а) 0,67%. б) 1,6%, в) 4-5 чел/день, г) 1-2 чел/час, д) 1,6, е)30,6%, ж)2 чел/день, з) 8

18. 1: 200; 1: 2500

19. 12 г; 4,5 г.

20. 750 мл; 1000 мл

21. 2 мл

22. 44

23. 2 мл

24. 6 дн., 2 уп.

Заключение

Представленное учебно-методическое пособие успешно применяется уже несколько лет на первом курсе по всем специальностям Архангельского медицинского колледжа. В нем учитывается специфика медицинского образовательного учреждения, а также не очень высокий уровень знаний студентов школьной математики.

Задания подобраны с учетом формирования общих и профессиональных компетенций согласно Федеральным государственным образовательным стандартам по специальностям 060101 Лечебное дело, 060102 Акушерское дело, 060301 Фармация, 060501 Сестринское дело, 060604 Лабораторная диагностика.

В результате применения учебно-методического пособия повысился интерес обучающихся к изучению дисциплины Математика. Для организации самостоятельной работы обучающиеся могут использовать интерактивные приложения, созданные с помощью программ Microsoft Power Point 2007 и ISpring Pro.

Распределение заданий по уровням сложности позволяет дифференцированно подходить к обучению.

Шрифтовое оформление применяется с методическими целями: акцентировать внимание на ключевых моментах, визуально выделить теоретическую и практическую части, формулы, примеры, эталоны ответов.

В пособии материал обобщен и систематизирован, содержит теоретическую справку и практические задания по всем темам математики, изучаемым в *медицинском* колледже, а также задачи профессиональной направленности, что отличает его от имеющихся учебников и пособий.

Приложения

Приложение 1

Формулы сокращённого умножения

Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Действия с дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b} \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc} \qquad c : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$$

Действия со степенями

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n раз}} = a^n \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n}$$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^0 = 1$

Корни квадратного трехчлена $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$

Корни $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Действия с корнями

$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a \leq 0 \end{cases}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[np]{a^{mp}}$

$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n}$

Действия с логарифмами

$\log_a b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$ - логарифм числа b по основанию a.

$\log_a b = c, a^c = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$

Свойства логарифма

$a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a a^n = n$

Таблица значений тригонометрических функций углов I четверти

Угол α Функция	0°	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	∞
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Приложение 2.

Приемы устного счета

«Счет и внимание – основы порядка в голове!»

И.Г. Песталоцци

Умножение многозначного числа на 5, 50, 500

При умножения многозначного числа на 5 (50, 500), надо это число умножать на 10 (100, 1000) и разделить потом получившееся число на 2. Если многозначное число четное, то сначала лучше разделить его на 2, а затем частное умножить на 10 (100, 1000).

1. $35 \cdot 5 = (35 \cdot 10) : 2 = 350 : 2 = 175$
2. $446 \cdot 5 = (446 : 2) \cdot 10 = 223 \cdot 10 = 2230$
3. $78 \cdot 50 = (78 : 2) \cdot 100 = 39 \cdot 100 = 3900$
4. $832 \cdot 50 = (832 : 2) \cdot 100 = 416 \cdot 100 = 41600$
5. $706 \cdot 500 = (706 : 2) \cdot 1000 = 353 \cdot 1000 = 353000$

Умножение многозначного числа на 25, 250

При умножения многозначного числа на 25 (250), надо это число умножить на 100 (1000) и разделить потом получившееся число на 4. Если многозначное число четное, то сначала лучше разделить его на 4, а затем умножить на 100 (1000).

1. $2{,}3 \cdot 25 = (2{,}3 \cdot 100) : 4 = 230 : 4 = 57{,}5$
2. $48 \cdot 25 = (48 : 4) \cdot 100 = 12 \cdot 100 = 1200$
3. $24 \cdot 250 = (24 : 4) \cdot 1000 = 6 \cdot 1000 = 6000$
4. $1{,}2 \cdot 250 = (1{,}2 : 4) \cdot 1000 = 0{,}3 \cdot 1000 = 300$
5. $15 \cdot 250 = (15 \cdot 1000) : 4 = 15000 : 4 = 3750$

Деление многозначного числа на 5, 50, 500

Чтобы разделить число на 5 (50, 500), его надо умножить на 2 и разделить потом получившееся число на 10 (100, 1000).

1. $135:5 = (135 \cdot 2):10 = 270:100 = 27$
2. $2150:50 = (2150 \cdot 2):100 = 4300:100 = 43$
3. $413:50 = (413 \cdot 2):100 = 826:100 = 8{,}26$
4. $32:500 = (32 \cdot 2):1000 = 64:1000 = 0{,}064$
5. $152:500 = (152 \cdot 2):1000 = 304:1000 = 0{,}304$

Деление на 25, 250

Чтобы разделить число на 25 (250), его надо умножить на 4 и разделить на 100 (1000).

1. $54:25 = (54 \cdot 4):100 = 216:100 = 2{,}16$
2. $725:25 = (725 \cdot 4):100 = 2900:100 = 29$
3. $123:250 = (123 \cdot 4):1000 = 492:1000 = 0{,}492$
4. $456 : 250 = (456 \cdot 4):1000 = 1824:1000 = 1{,}824$
5. $1245:250 = (1245 \cdot 4):1000 = 4980:1000 = 4{,}98$

Умножение двузначных чисел на 11

Чтобы умножить любое двухзначное число на 11, нужно сложить эти 2 цифры числа вместе и поместите их сумму посередине, если сумма, умножаемого на 11, меньше 10. А если сумма цифр больше 10, то между ними ставится количество единиц в сумме цифр данного числа, а первая цифра множимого числа увеличивается на 1.

1. $43 \cdot 11 = 4[4+3]3 = 473$
2. $62 \cdot 11 = 6[6+2]2 = 682$
3. $75 \cdot 11 = 7[7+5]5 = 825$
4. $38 \cdot 11 = 3[3+8]8 = 418$
5. $59 \cdot 11 = 5[5+9]9 = 649$

Умножение трехзначных чисел на 11

При умножении трехзначных чисел на 11 произведение получится четырехзначным. Цифра тысяч в произведении – это цифра сотен числа. Цифра сотен произведения – это цифра сотен плюс цифра десятков множимого. Цифра десятков произведения – это цифра десятков плюс цифра единиц множимого. Цифра единиц произведения – это цифра единиц множимого. Если сумма цифр больше десяти, то цифру предыдущего разряда увеличиваем на 1.

1. $354 \cdot 11 = 3[3+5][5+4]4 = 3894$
2. $423 \cdot 11 = 4[4+2][2+3]3 = 4653$
3. $629 \cdot 11 = 6[6+2][2+9]9 = 6919$
4. $745 \cdot 11 = 7[7+4][4+5]5 = 8195$
5. $238 \cdot 11 = 2[2+3][3+8]8 = 2618$

Умножение двузначных чисел на 101

Чтобы умножить двузначное число на 101, надо мысленно приписать к данному числу ещё раз само это число.

1. $58 \cdot 101 = 5858$
2. $36 \cdot 101 = 3636$
3. $74 \cdot 101 = 7474$
4. $98 \cdot 101 = 9898$
5. $63 \cdot 101 = 6363$

Умножение трёхзначных чисел на 101

Чтобы умножить трёхзначное число на 101, надо данное число увеличить на число его сотен и приписать две последние цифры данного числа.

1. $325 \cdot 101 = [325+3]25 = 32825$
2. $844 \cdot 101 = [844+8]44 = 85244$
3. $796 \cdot 101 = [796+7]96 = 80396$
4. $457 \cdot 101 = [457+4]57 = 46157$
5. $635 \cdot 101 = [635+6]35 = 64135$

Возведение в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5

Для возведения в квадрат двузначных чисел оканчивающихся на 5, надо число десятков умножить на следующее число, а потом приписать 25.

1. $25^2 = [2 \cdot 3]25 = 625$
2. $45^2 = [4 \cdot 5]25 = 2025$
3. $75^2 = [7 \cdot 8]25 = 5625$
4. $85^2 = [8 \cdot 9]25 = 7225$
5. $95^2 = [9 \cdot 10]25 = 9025$

Возведение в квадрат двузначных чисел пятого десятка

Чтобы возвести в квадрат число пятого десятка (41, 42,…, 49), надо к числу единиц прибавить 15, затем к полученной сумме приписать квадрат дополнения числа единиц до 10(если этот квадрат однозначное число, то перед ним приписывается 0).

1. $42^2 = [2 + 15](10 - 2)^2 = 1764$
2. $44^2 = [4 + 15](10 - 4)^2 = 1936$
3. $45^2 = [5 + 15](10 - 5)^2 = 2025$
4. $47^2 = [7 + 15](10 - 7)^2 = 2209$
5. $49^2 = [9 + 15](10 - 9)^2 = 2401$

Возведение в квадрат двузначных чисел шестого десятка

Чтобы возвести в квадрат число шестого десятка (51, 52, …, 59), надо к числу единиц прибавить 25 и к этой сумме приписать квадрат числа единиц (если этот квадрат однозначное число, то перед ним приписывается 0).

1. $53^2 = [3 + 25]3^2 = 2809$
2. $54^2 = [4 + 25]4^2 = 2916$
3. $56^2 = [6 + 25]6^2 = 3136$
4. $57^2 = [7 + 25]7^2 = 3249$
5. $59^2 = [9 + 25]9^2 = 3481$

Список использованных источников

1. Виноградов, Ю.Н. Математика и информатика: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/Ю.Н. Виноградов, А.И. Гомола, В.И. Потапов, Е.В. Соколова. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 272 с.
2. Лисицын Ю.П. Общественное здоровье и здравоохранение: Учебник. – М.: ГЭОТАР-МЕД, 2002.
3. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики. Учеб. для студ. высших учеб. заведений./Ю.В.Морозов. – М.: Медицина, 2004 – 232 с.
4. Омельченко В.П. Практические задания по высшей математике: Учеб.пособие/ В.П. Омельченко, Э.В.Курбатова. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 350 с.
5. Омельченко В.П. Математика: Учеб.пособие/ В.П. Омельченко, Э.В.Курбатова. – Ростов н/Д: Феникс, 2011. – 380 с.
6. Пехлецкий И.Д. Математика: Учеб. для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования/ И.Д. Пехлецкий. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 304 с.
7. Применение методов статистического анализа для изучения общественного здоровья и здравоохранения: Учебное пособие для практических занятий / Под ред В.З. Кучеренко. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2005.
8. Руководство к практическим занятиям по социальной гигиене и организации здравоохранения / Под ред. Ю.П. Лисицына, Н.Я. Копыта. – М.: Медицина, 1984.
9. Филимонова, Е.В. Математика/Е.В. Филимонова. - Ростов-на-Дону Феникс, 2003, 384
10. Филимонова, Е.В. Математика и информатика: Учебник./Е.В. Филимонова. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2007, 480.

Ответы к практическим заданиям

1. Функция. Свойства функций. Область определения функций

1.1. (-1;3), (0;5). **1.2.** (1;–3), (2;0). **1.3.** (4;16), (3;8). **1.4.** (16;4), (8;3). **1.5.** а) $(-\infty;+\infty)$, б) $[-2;+\infty]$, в) $[2;4]$ г) $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. **1.6.** нет. **1.7.** да. **1.8.** да. **1.9.** а) Вельский, Плесецкий, Онежский; б) Соловецкий, Новая Земля. **1.10.** г). **1.12.** $1 \le y \le 7$. **1.13.** $1/2 \le y \le 3$. **1.14.** $-11 \le y \le 10$. **1.15.** R. **1.16.** $[-2;+\infty)$. **1.17.** $[-\infty;0)$. **1.18.** а) (50; 21), б) (1; -3,5), в) (3; 3,5), г) (0;0), (2;8). **1.19.** $(-\infty;0]$. **1.20.** R. **1.21.** R\{2}. **1.22.** четная. **1.23.** нечетная. **1.24.** четная. **1.25.** ни четная, ни нечетная. **1.28.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **1.29.** $[-2;2]$. **1.30.** $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$. **1.31.** $(-1;2]$. **1.32.** $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **1.33.** $(-\infty;0)\cup[1{,}5;+\infty)$. **1.34.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **1.35.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **1.36.** $(-\infty;1{,}5)$. **1.37.** $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$. **1.38.** $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$. **1.39.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **1.40.** $(-1;0{,}5)$. **1.41.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. **1.42.** $[-4,+\infty)$. **1.43.** $[1,5]$. **1.44.** $[-3;1]$.

1.45. $[-5;5]$. **1.46.** верхняя половина окружности радиусом 4 и центром в начале координат. **1.47.** нечетная. **1.48.** ни четная, ни нечетная. **1.49.** нечетная. **1.50.** четная. **1.51.** четная. **1.52.** ни четная, ни нечетная. **1.53.** $[1;2)\cup(2;+\infty)$. **1.54.** $[3;+\infty)$. **1.55.** $(6;+\infty)$. **1.56.** $(-\infty;-2)\cap(-2;+\infty)$ **1.57.** $(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$. **1.58.** $x\in(0;1]$. **1.59.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **1.60.** $[1;4)$. **1.61.** $(0;5]$. **1.62.** $[125;+\infty)$. **1.63.** $[1;+\infty)$. **1.64.** $[-2;0]$. **1.65.** $(-\infty;\frac{7}{3}]$. **1.66.** $[14;+\infty)$. **1.67.** $[1;2]$**1.68.** а) ни четная, ни нечетная. б) нечетная.

2. Пределы

2.1. 23; **2.2.** 2; **2.3.** 2; **2.4.** 1; **2.5.** $-\frac{3}{2}$; **2.6.** 2; **2.7.** 4,5; **2.8.** ∞; **2.9.** ∞; **2.10.** 0; **2.11.** 0; **2.12.** 5; **2.13.** ∞; **2.14.** 0; **2.15.** $-\frac{2}{5}$; **2.16.**-3; **2.17.**$\frac{5}{3}$; **2.18.** 0; **2.19.** $\frac{5}{16}$; **2.20.** $\frac{81}{6}$; **2.21.** $\frac{2}{21}$; **2.22.**$\frac{31}{125}$; **2.23.**$\frac{8}{49}$; **2.24.** $\frac{11}{15}$; **2.25.** 2; **2.26.**6; **2.27.**$-\frac{1}{6}$; **2.28.**14; **2.29.**10; **2.30.**$\frac{19}{30}$; **2.31.**$\frac{1}{5}$; **2.32.**$-\frac{2}{9}$; **2.33.**12; **2.34.**$-\frac{1}{\sqrt{2}}$; **2.35.**$-\sqrt{5}$; **2.36.**$\frac{1}{4}$; **2.37.**1; **2.38**. 6; **2.39.**2; **2.40.**$\frac{1}{4}$; **2.41.**$-\frac{1}{2}$; **2.42.**2; **2.43.**$\frac{1}{2}$; **2.44.**$\frac{1}{4}$; **2.45.**0; **2.46.** ∞; **2.47.**0; **2.48.**$\frac{8}{7}$; **2.49.**

∞; **2.50.**0; **2.51.**$-\frac{2}{5}$; **2.52.**0; **2.53.**0; **2.54.**0; **2.55.**0; **2.56.**3; **2.57.**3; **2.58.**$\frac{8}{3}$; **2.59.**0; **2.60.** Знакочередующиеся а,д; знакоположительные б,г; степенные в,е; 2.61. Сходятся а, б, д, е; расходятся: в, г **2.62.**6; **2.63.**–5; **2.64.**$-0{,}5$; **2.65.**$\frac{2}{3}$; **2.66.**$\frac{1}{12}$; **2.67.**–0,75; **2.68.** $\frac{1}{8}$; **2.69.**9; **2.70.**3; **2.71.**2,25; **2.72.**0; **2.73.**0,02; **2.74.**2; **2.75.**$-1\frac{1}{3}$; **2.76.**5; **2.77.**$\frac{2}{3}$; **2.78.**1; **2.79.**$\frac{1}{3}$; **2.80.**1; **2.81.**$\frac{3}{5}$; **2.82.**$\frac{1}{e}$; **2.83.**e^6; **2.84.**e^{ab}; **2.85.** e^2; **2.86.** e^3; **2.87.** e^{10}; **2.88.** e; **2.89.**$\sqrt{e}$; **2.90.**$-\frac{5}{3}$

3. Производная функции

3.1. 0. **3.2.** 1. **3.3.** -1. **3.4.** 2x. **3.5.** π. **3.6.** 0,2. **3.7.** x^4-3x^3-6. **3.8.** $\frac{1}{4}+2x$.

3.9. $tg\varphi$. **3.10.** $y'(-0{,}5)=1,\ y'(0{,}5)=7$. **3.11.** $y'(1)=6, y'(-1)=-6$

3.12. $-sinx(x^2+3x)+cosx(2x+3)$. **3.13.** $cosx\cdot tgx+\frac{sinx}{cos^2x}$

3.14. $\frac{2-4x-x^2}{x^2(x-1)^2}$. **3.15.** $\frac{6x^2-6x-5}{(2x-1)^2}$. **3.16.** $14(x+1)(x^2+2x-6)^2$. **3.17.** $\frac{2}{x}$

3.18. $2\cdot 3^{2x}ln3$. **3.19.** 39. **3.20.** $1\frac{7}{8}$. **3.21.** 2. **3.22.** $-\frac{1}{12}$. **3.23.** -1. **3.24.** -3 **3.25.** 3.

3.26. 5. **3.27.** 0,5. **3.28.** 10. **3.29.** 2,5. **3.30.** $\frac{100}{(1+5t)^2}$. **3.31.** 0 **3.32.** 6. **3.33.** $-\sin x$.

3.34. $-16\sin 4x$. **3.35.** $120x^3+96x^2-7^x(ln7)^2$ **3.36.** $144x^2-18x-10$.

3.37. $36x^2-78x+38$. **3.38.** $18x^5-45x^4-7$ **3.39.** $\frac{6}{xln\,2}$. **3.40.** $\frac{4}{\sqrt{x}}+5^x ln5$.

3.41. 3.40. $-\frac{6}{xlnx}+\frac{1}{x}$. **3.42.** $5^x ln5+\frac{1}{xln\,2}$ **3.43.** $3x^2cosx-x^3sinx$. **3.44** $(3x^7-6)cosx+21x^6sinx$ **3.45.** $\frac{e^x}{xln\,3}+e^x\cdot\log_3 x$. **3.46.** $\frac{13}{(1-4x)^2}$. **3.47.** $\frac{-5x^4-15x^2-6x}{(1+x^2)^2}$

3.48. $\frac{-2x^3+3x^2+1}{(1-x)^2}$. **3.49.** $12^x ln12-\frac{2}{\sqrt{x}}$. **3.50.** $\frac{3cosx-1}{sin^2x}$. **3.51.** $4x^3sinx+x^4cosx$

3.52. $\frac{1}{1-cosx}$. **3.53.** $\frac{4sinx}{(cosx-2)^2}$. **3.54.** $-\frac{1}{1+sinx}$. **3.55.** $-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

3.56. $-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 8$. **3.57.** $(-7;\ 5{,}5), (-2{,}2;\ 6{,}2);\ 12$

3.59. 37. **3.60.** а) $2g$; б) $3{,}5g$. **3.61.** 8. **3.62.** 3. **3.63.** $t=2;\ a=6$. **3.64.** 0,1

3.65. 42. **3.66.** $4^x ln4-\frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{xln\,3}+2e^x$. **3.67.** $\frac{3}{\sqrt{x}}+3^x ln3+e^x-\frac{1}{xln\,10}$

3.68. $\frac{5}{2}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **3.69.** $\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. **3.70.** $-12x^3-\frac{8}{x^3}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3.71. $a^{sinx}\,lna\cdot cos\,a$. **3.72.** $\sqrt{x^3}\left(\frac{5}{2}lnx+1\right)$. **3.73.** $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}cosx-\sqrt[8]{x^3}sinx$

3.74. $10x^9\log_2 x+\frac{x^{10}}{xln\,2}$. **3.75.** $\frac{4sinx}{cos^3x}$. **3.76.** $\frac{x-1-lnx}{(x-1)^2}$. **3.77.** $\frac{2e^x(x-1)}{(x-e^x)^2}$

3.78. $6\cos(6x-1)$. **3.79.** $\frac{1+2sinx}{cos^2x}$. **3.80.** $3x^2tgx+\frac{x^3}{cos^2x}$.

3.81. $48x^5\cos(8x^6-5)$. **3.82.** $3sin^2x\cdot cosx$. **3.83.** $-10cos^4x\cdot sinx$

3.84. $\frac{3tg^2x}{cos^2x}$. **3.85.** $(10x+15)(x^2+3x-10)^4$.

3.86. $10\left(x^5-3x+\frac{1}{x}\right)^9\left(5x^4-3-\frac{1}{x^2}\right)$. **3.87.** $-\frac{8}{(2x+3)^5}$. **3.88.** $-\frac{20}{(4x+1)^6}$

3.89. $6(x^3+3x)^5(3x^2+3)$. **3.90.** $\frac{-36\mathrm{x}}{(3\mathrm{x}^2-5)^7}$. **3.91.** $2\mathrm{x}\ln(1-2\mathrm{x})-\frac{2\mathrm{x}^2}{1-2\mathrm{x}}$

3.92. 1. **3.93.** -0,75. **3.94.** 2. **3.95.** 0,25. **3.96.** -0,25. **3.97.** -0,75

3.98. max: $f(0)=7$; min: $f(2)=-9$. **3.99.** max: $f(8)=423$; min: $f(2)=-9$

3.100. max: $f(2)=0$; min: $f(1)=-2$. **3.101.** max: $f(3)=3$; min: нет

3.102. функция возрастает при $\mathrm{x}=4$; убывает при $\mathrm{x}=-3,\mathrm{x}=-1$.

3.103. функция возрастает при всех перечисленных значениях x.

3.104. функция возрастает при $\mathrm{x}=-5$; убывает при $\mathrm{x}=2,\mathrm{x}=7$.

3.105. функция возрастает при $\mathrm{u}=\pm2$ –, при $\mathrm{u}=\pm1$ – убывает.

3.106. min: в точке $\mathrm{x}=0$, функция возрастает на $(0;\infty)$, убывает $(-\infty;0)$.

3.107. max: в точке $\mathrm{x}=0$, функция возрастает на $(-\infty;0)$, убывает $(0;\infty)$.

3.108. min: в точке $\mathrm{x}=2$ функция возрастает на $(2;+\infty)$, убывает $(-\infty;2)$.

3.109. min: $\mathrm{f}(-1)=-1\frac{5}{6}$; max: $\mathrm{f}(-4)=2\frac{2}{3}$; функция возрастает на$(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$; убывает на $(-4;-1)$. **3.110.** min: $\mathrm{f}(-2)=-14\frac{2}{3}$; $\mathrm{f}(1)=-12\frac{5}{12}$ max: $\mathrm{f}(0)=-12$ функция возрастает на $(-1;0)$ и $(1;\infty)$; убывает на $(-\infty;-2)$ и $(0;1)$. **3.111.** min: $\mathrm{f}(3)=13{,}5$; max: $\mathrm{f}(2)=14$; функция возрастает на $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; убывает на $(2;3)$. **3.112.** min: $f(1)=-\mathrm{e}$; функция возрастает на $(1;+\infty)$; убывает на $(-\infty;1)$. **3.113.** $4x_0$. **3.114.** $-3{x_0}^2$. **3.115.** $4x_0-7$. **3.116.** $\frac{8x+2}{(4x^2+2x-5)ln10}$.

3.117. $2^{3x+x^2}+x(3+2x)ln2\cdot2^{3x+x^2}$. **3.118.** $-\frac{sinln\,5x}{x}$. **3.119.** $-5tg5x$. **3.120.**

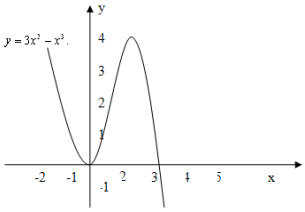
$-2sin(cos^3x)\cdot 3cos^2x\cdot sinx.$ **3.121.** $21cos^2 7x-\frac{5}{cos^2 5x}.$ **3.122.** $\frac{2e^x(4x-7)}{(4x+1)^5}.$

3.123. $\frac{3\cdot 2^{3x+4}(ln2(3x-5)-6)}{(3x-5)^7}.$ **3.124.** $2ctg(2x+5).$ **3.125.** $-35cos^6 5x\cdot sin5x\cdot sin2^x+2^x ln2\cdot cos^7 5x\cdot cos2^x$ **3.126.** $\frac{3x^{10}+18x^9}{(x^2+3x)^4}.$ **3.127.** $\frac{6}{\sqrt{1-(6x-1)^2}}-\frac{9x^2}{cos^2 3x^3}.$

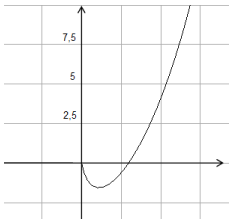
3.128. $\frac{3sin^2x}{cos^4x}+\frac{1}{cos^2(5x-2)}.$ **3.129.** $tg^2x+2sin^2x.$ **3.130.** $-3sinx\cdot cos^2x-\frac{8x}{cos^2 4x^2}.$

3.131. $5^{ln5x+tgx}\cdot ln5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{cos^2x}\right).$ **3.132.** $e^{sinx}\cdot cosx\cdot \log_3(1-x)-\frac{e^{sinx}}{(1-x)ln3}.$

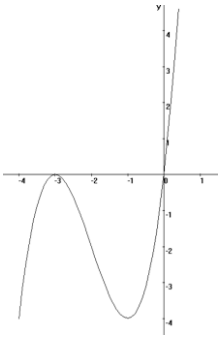
3.133. $\frac{3x^2+4x}{5\sqrt[5]{(x^3+2x^2-7)^4}}.$ **3.134.** $\frac{2x-cosx}{(x^2-sinx)ln3}.$ **3.135.** $-5tg5x-\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$ **3.136.** $8e^{8x}cose^{8x}+\frac{6}{tg3xcos^2 3x}.$ **3.137.** $20x+13.$ **3.138.** $y=-\frac{3}{4}x.$ **3.139.** $y=-x-1.$ **3.140.** $y=5x.$ **3.141.** $y=x-2.$ **3.142.** $y=0{,}4x+2{,}6.$ **3.143.** $v=-Ake^{-kt}.$ **3.144.** $v=-C_0ke^{-kt}.$ **3.145.** $v=\frac{900e^t}{(1+0{,}1(e^t-1))^2}.$ **3.146.** $v=e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2);$ $a=e^{-\frac{t^2}{2}}(t^3-3t).$ **3.147.**



3.148.

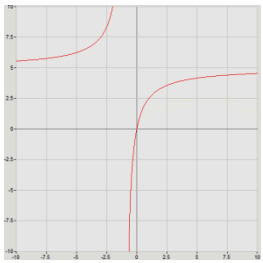


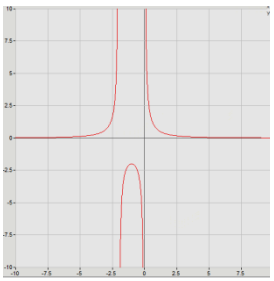
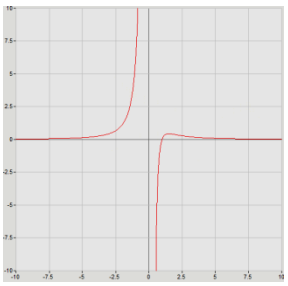
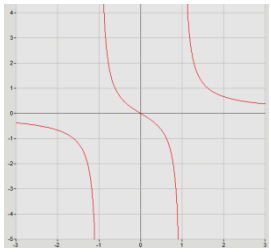
3.149.

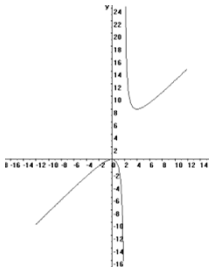
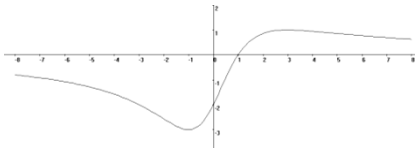


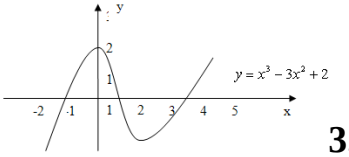
3.150.

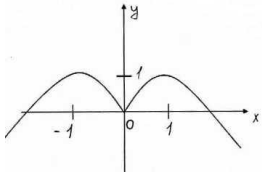
3.151.



3.152.  **3.153.**  **3.154.** 

3.155.  **3.156.** 

3.157. 

3.158. 

4. Дифференциал функции

4.1.0,014; **4.2.**0,396; **4.3.**0,02; **4.4.**0,992; **4.5.** 1) $ctg(x_0 + \Delta x) \approx ctg\, x_0 - \frac{1}{\sin^2 x_0} \cdot \Delta x$; 2) $arctg(x_0 + \Delta x) \approx arctg\, x_0 + \frac{1}{1+{x_0}^2} \cdot \Delta x$; 3) $ln(x_0 + \Delta x) \approx ln\, x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x$; **4.6.**0,01; **4.8.**второе более точное, $\delta_1 \approx 0{,}17\%$, $\delta_2 \approx 0{,}14\%$; **4.9.** 615±5 км; **4.10.** 0,0016; 0,05%; **4.11.** 0,14; **4.12.** -0,22; **4.13.**1,65; **4.14.** $-0{,}003$; **4.15.** $-0{,}002$; **4.16.** $-0{,}207$; **4.17.**0,9955; 0,00061; **4.18.** 1,004; 0,00001; **4.19.**1,02;0,0002; **4.20.**0,997; 0,000004; **4.21.**1,006;0,00002; **4.22.** $dy = \left(\frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{15}{x^6}\right) dx$; **4.23.** $dy = \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x ln\, 7}\right) dx$; **4.24.** $dy = \left(2^x ln2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$; **4.25.** $dy = \left(\frac{3x^2}{cos^2 x^3} - 10cos2x\right) dx$;

4.26. $dy = (3cos\, 3x \cdot cos4x - 4sin4xsin3x)dx$; **4.27.** $dy = (3x^2 sinx^3)dx$; **4.28.** $dy = (-3(cosx)^2 sinx)dx$; **4.29.** $dy = (6sin3x \cdot cos3x)dx$; **4.30.**0,001; **4.31.**0,14; **4.32.** $-0{,}02\pi$; **4.33.** 25,6; **4.34.** 1,995; **4.35.**0,20048; **4.36.** $-\frac{139}{450}$; **4.37.**4,95; **4.38.**3,05; 4.**39.**5,01; **4.40.**2,003; **4.41.** $2{,}45 \cdot 3^{49}$; **4.42.**3,014; **4.43.**5,1; **4.44.**3,98; **4.45.**1,996; **4.46.**2,497; **4.47.**5,009; **4.48.**1,02; **4.49.**0,5151; **4.50.**0,623;

4.51.0,4849; **4.52.**0,92956; **4.53.**0,07; **4.54.**1,0698; **4.55.**1,035; **4.56.** $du = (2y + 9y^2x^2)dx + (2x + 6yx^3)dy$; **4.57.** $du = 2xdx + 5dy$; **4.58.** $du = 40xcos(5x^2 - y)dx - 4cos(5x^2 - y)dy$; **4.59.** $du = ye^x dx + e^x dy$; **4.60.** $du = ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$; **4.61.** $du = (2x + y)dx + xdy + 2zdz$; **4.62.** $du = \frac{1}{z}dx + \frac{2y}{z}dy + \left(\frac{-x}{z^2} - \frac{y^2}{z^2}\right)dz$; **4.63.** $\frac{dN}{dt} = \frac{-5N_0k(5-N_0)e^{-kt}}{\left((5-N_0)e^{-kt}+N_0\right)^2}$; **4.64.** $t = k^{-\frac{1}{2}}$.

5. Неопределенный интеграл

5.1. $S = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + t + 30$. **5.1.** $v = t^3 - 2t^2 + 4t + 8$. **5.3.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2$. **5.4.** $F(x) = -cosx - sinx + 5\sqrt{2}$. **5.5.** $\frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 7x + C$. **5.6.** $-2cosx + 3sinx$. **5.7.** $\frac{x^8}{4} + x^3 - x + \frac{6^x}{ln6} + C$. **5.8.** $-\frac{1}{x^2} + C$. **5.9.** $\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$. **5.10.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3}\sqrt{5x^3} + x + C$. **5.11.** $\frac{x^2}{2} + \frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{4}ln|x| + \frac{1}{2x} + C$. **5.12.** $\frac{x^6}{9} + \frac{5}{12}x^2 - \frac{1}{6}ln|x| - \frac{1}{6x} + C$. **5.13.** $\frac{x^4}{8} + \frac{1}{x^2} + C$. **5.14.** $-\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{2x^4} + C$. **5.15.** $6\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$. **5.16.** $\frac{x^2}{2} + lnx - x + \frac{3}{x} + C$. **5.17.** $\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 4x + C$. **5.18.** $\frac{x^4}{4} - x^2 + x^3 - 6x + C$. **5.19.** $6x + \frac{x^2}{2} + C$. **5.20.** $\frac{21^x}{ln21} + C$. **5.21.** $\frac{2}{3}sinx + C$ **5.22.** $e^x - \frac{1}{x} + C$. **5.23.** $x + cosx + C$. **5.24.** $tgx - x + C$. **5.25.** $2\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{4}{5}\sqrt{x^5} - 2ln|x| + C$. **5.26.** $3x + 62ln|cosx| + C$. **5.27.** $a^2x + abx^2 + b^2\frac{x^3}{3} + C$. **5.28.** $\frac{1}{3}ln|x^3 + 5| + C$. **5.29.** $\frac{1}{93}(3x - 1)^{31} + C$. **5.30.** $\frac{e^{x^2}}{2} + C$. **5.31.** $\frac{1}{2}ln|x^4 + 3| + C$. **5.32.** $ln\left|ln|x|\right| + C$. **5.33.** $\frac{1}{5}\sin(5x - 7) + C$. **5.34.** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}3x + C$. **5.35.** $\frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{3} + C$. **5.36.** $\frac{2\sqrt{(x^3+5)^3}}{9} + C$. **5.37.** $\frac{1}{4}arctg\frac{x-3}{4} + C$. **5.38.** $\frac{1}{4}arcsin\frac{3x}{2} + C$. **5.39.** $\frac{1}{12}arctg\frac{3x}{4} + C$. **5.40.** $-3cos\sqrt[3]{x} + C$. **5.41.** $ln|sinx| + C$. **5.42.** $\frac{sin^5x}{5} + C$. **5.43.** $-\frac{sin^8x}{8} + C$. **5.44.** $\frac{e^{x^4}}{4} + C$. **5.45.** $2\sqrt{1 + e^x} + C$. **5.46.** $ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right| + arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$. **5.47.** $\frac{1}{16}arctg\frac{x-3}{4} + C$. **5.48.** $\frac{2}{3}(sinx)^{\frac{3}{2}} + C$. **5.49.** $\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$. **5.50.** $-\frac{2}{\sqrt{sinx}} + C$. **5.51.** $arcsin\frac{x+1}{3} + C$. **5.52.** $-e^{cos^2x} + C$. **5.53.** $2arctg\sqrt{x} + C$. **5.54.** $\frac{1}{3}ln|3tgx + 1| + C$. **5.55.**

$\frac{1}{2}arctg\frac{sinx-3}{2}+C$. **5.56.** $xlnx-x+C$. **5.57.** $\frac{x^2}{4}(2lnx-1)+C$. **5.58.** $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)lnx-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+C$. **5.59.** $xsinx+cosx+C$. **5.60.** $e^x(x-1)+C$. **5.61.** $2xsinx-x^2cosx+6cosx+C$. **5.62.** $\frac{x}{3}sin3x+\frac{1}{9}cos3x+C$. **5.63.** $-x^2cosx+2xsinx+2cosx+C$.

5.64. $-\frac{lnx}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$. **5.65.** $\frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right)+C$.

6. Определенный интеграл

6.1. 0,5; **6.2.** $\frac{49}{15}$; **6.3.** 0; **6.4.** –18; **6.5.** $\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}+3}{3}$; **6.6.** $-\frac{85}{6}$; **6.7.** $\frac{3}{5}ln2$; **6.8.** 0,24; **6.9.** $\frac{32}{3}$; **6.10.** $\frac{1}{3}$; **6.11.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **6.12.** $\frac{11}{ln12}$; **6.13.**6; **6.14.**$1\frac{3}{4}$; **6.15.** $2\frac{2}{3}$; **6.16.**$-4\frac{1}{2}$; **6.17.** $9\frac{1}{5}$; **6.18.** 240; **6.19.**0,5; **6.20.** $3\frac{1}{3}$; **6.21.**166,5+ln10; **6.22.**$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}-1$; **6.23.** $\frac{21}{8}$; **6.24.**1; **6.25.**$\frac{2}{\pi}$; **6.26.**3; **6.27.** $\frac{-3+\sqrt{273}}{6}$; **6.28.**6; **6.29.**30; **6.30.**4,8; **6.31.**7,2; **6.32.**12; **6.33.**9; **6.34.**$1\frac{1}{3}ед^2, 1\frac{1}{15}\pi\ ед^3$; **6.35.** $4\frac{2}{3}ед^2, 13\frac{11}{15}\pi\ ед^3$; **6.36.**36; **6.37.** $\frac{1}{6}$; **6.38.**10; **6.39.**$\frac{56}{ln8}$; **6.40.**$-0{,}5$;**6.41.**2; **6.42.**$0{,}5\ln 2$; **6.43.**$e-1$; **6.44.**$0{,}5\ln\frac{5}{\sqrt{2}+3}$; **6.45.**$\frac{14}{2025}$; **6.46.**$\ln\frac{e+4}{5}$; **6.47.**$\frac{1}{3}$; **6.48.**1400 м, 560 м; **6.49.**$\frac{1}{3}, 0{,}3\pi$; **6.50.**$10\frac{2}{3}ед^2$; **6.51.** $\frac{1}{6}, \frac{8}{77}\pi$; **6.52.**8; **6.53.**$21\frac{1}{3}$; **6.54.** $4\frac{1}{2}$; **6.55.**4; **6.56.** 4,5; **6.57.**$\frac{1}{12}$; **6.58.** $\frac{16}{3}$; 8π; **6.59.** $10\frac{5}{12}$; **6.60.**2,5; **6.61.** $2a^3-2a^2$; **6.62.**$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{4}$; **6.63.**$\frac{1}{8}$; **6.64.**$4\frac{1}{2}$; **6.65.**а) $\frac{\pi}{4}$, б) $\frac{4\pi}{7}$.

7. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике

7.1. да. **7.2.** да. **7.3.** да. **7.4.** нет. **7.5.** да. **7.6.** да. **7.7.** $y=\frac{3x^4}{2}+C$. **7.8.** $y=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+C}$. **7.9.** $y=\sqrt{\frac{2x^3}{3}+C}$. **7.10.** $y=\pm\sqrt{|-x^2+C|}$. **7.11.** $y=(x+C)^2$. **7.12.** $y=\frac{9\sqrt[3]{x^5}}{5}+C$. **7.13.** $x^3+3x^2C_1+3x{C_1}^2+{C_1}^3$. **7.14.** $y=tg(x+C)$. **7.15.** $y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. **7.16.** $y=x^2+2xC_1+{C_1}^2$.

7.17. $y=\sqrt[3]{C_1-\frac{3}{2}x^2}$. **7.18.** $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. **7.19.** $y=\sqrt[3]{2x^2+C}$.

7.20. $y=-\frac{2}{x^2+C}$. **7.21.** $y=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+C_1}$. **7.22.** $y=-\frac{1}{sinx+C}$. **7.23.** $y=\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}+C\right)^2$.

7.24. $\frac{y^2}{2}-2y=\frac{x^2}{2}+x+C$. **7.25.** $y=\frac{1}{cosx+C}$. **7.26.** $y=C_1sinx-1$.

7.27. $y=arctg\left(x-\frac{x^2}{2}+C\right)$. **7.28.** $y=C(x+3)-3$. **7.29.** $y=\frac{C}{cosx}-1$.

7.30. $y=\frac{1}{4}cos^2x+C_1$. **7.31.** $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$; $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+5$. **7.32.** $y=\frac{C}{x}$; $y=\frac{8}{x}$.

7.33. $y=-cosx+C$; $y=-cosx+3$. **7.34.** $y=\frac{x}{Cx-1}$; $y=-x$

7.35. $y=\left(\frac{x}{3}+C\right)^3$; $y=\left(\frac{x}{3}+1\right)^3$. **7.36.** $y=\sqrt{x+C}$; $y=\sqrt{x+4}$.

7.37. $y=\frac{1}{3}tgx+C$; $y=\frac{1}{3}tgx$. **7.38.** $y=\sqrt{x^2-4x+C}$; $y=\sqrt{x^2-4x+1}$.

7.39. $s=t^2+3t+C$. **7.40.** $S=t^2+t^3+4$. **7.41.** $y=\frac{3x^2}{2}-2x+C$.

7.42. $y=x^2+5x-20$. **7.43.** $y=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+3$. **7.44.** $y=2x^2-3x-5$.

7.45. $y=\sqrt[3]{x+8}$. **7.46.** $s=\frac{5t^3}{3}-2t+C$; 39 м. **7.47.** *а) S=45м; б) t=6с.*

7.48. $y=-\frac{1}{x}$. **7.49.** $y(t)=C_1e^{-3t}+C_2te^{-3t}$. **7.50.** $y(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}$.

7.51. $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$. **7.52.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$. **7.53.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$.

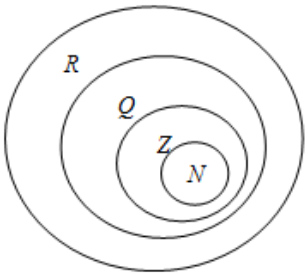
7.54. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$. **7.55.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-5x}$. **7.56.** $y(t)=4e^{-3t}-3e^{-2t}$. **7.57.** $y(t)=te^{5t}$. **7.58.** $y(t)=4e^{2t}+3e^{t}$. **7.59.** $y(t)=5te^{-4t}$.

7.60. $xye^{x-y}=C_1$. **7.61.** $y=\sqrt[3]{3ln\left(C\sqrt{1+e^{2x}}\right)}$. **7.62.** $siny=\frac{C}{cosx}$.

7.63. $y=\frac{2(x+1)^2}{1-2C(x+1)^2}+2$. **7.64.** $cosy=\frac{1}{C\cdot cosx}$. **7.65.** $y=tg(x+C)$. **7.66.** $y=C_1e^{-sinx}$. **7.67.** $y=Ce^{\frac{1}{x}}+a$. **7.68.** $y=Cx$. **7.69.** $y=Ce^{2\sqrt{x}}$; $y=e^{2\sqrt{x}-4}$. **7.70.** $y=\frac{C}{x}$; $y=\frac{2}{x}$. **7.71.** $y=\frac{1}{ln\sqrt{1+2x}-C}$; $y=\frac{1}{ln\frac{\sqrt{1+2x}\cdot e}{3}}$. **7.72.** $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$; $y=5e^{\frac{x^2}{2}}$. **7.73.** $y=Ce^{-\frac{1}{x}}$; $y=5e\cdot e^{-\frac{1}{x}}$. **7.74.** $y=C\sqrt[4]{x}$; $y=-5\sqrt[4]{x}$. **7.75.** $y=Ce^{\frac{x^2}{2}-x}$; $y=10e^{\frac{x^2}{2}-x}$. **7.76.** $y=\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+C_1}$; $y=\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+7}$. **7.77.** $y=\frac{C}{cosx}-1$; $y=$

$\frac{1}{cosx} - 1$. **7.78.** $y = Ccosx$; $y = 2cosx$. **7.79.** $y = tg\left(2\sqrt{x} + C\right); y = tg\left(2\sqrt{x} + \frac{\pi}{4}\right)$. **7.80.** $S = e^{3t}C_1$; $v = 24e^{3t}$. **7.81.** $C(t) = 0{,}2e^{-0{,}03t}$. **7.82.** $m = m_0e^{-kt}$. **7.83.** $N = N_0e^{kt}$. **7.84.** $\frac{dx}{dt} = 0{,}1x$; $x = Ce^{0{,}1t}$; $x(t) = 2718$. **7.85.** $A(t) = A_0e^{-kt}$. **7.86.** через 40 минут.

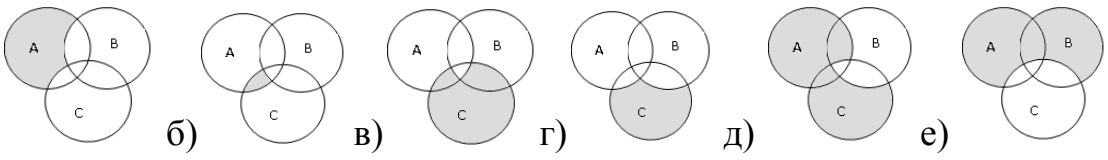
8. 8. Множества, графы

8.1. 

8.2. б)→г)→в)→а);

8.3. $A = \left\{\frac{3}{2}\right\}$; $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$; $C = \{3\}$; $D = \varnothing$; $E = \{-2\}$; $F = \{-2;\ -\frac{1}{2}\}$; **8.4.** а) $\{-3;\ 5\}$, б) $\varnothing$, в) $\{1;\ 2; 3;\ 4\}$; **8.5.** $A \neq B$; **8.6.** $\varnothing$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{3; 4\}$; $\{3; 5\}$; $\{4; 5\}$; $\{3; 4; 5\}$; **8.7.** $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$; **8.8.** $A \backslash B = \{1,2,4\}$, $B \backslash A = \emptyset$; **8.9.** г; **8.10.** в; **8.11.** $A \cup B = \{a, c, d, e, f, h\}$, $A \cap B = \{a, c, e\}$, $A \backslash B = \{d\}$; **8.12.** $A \cup B = \{-18, -13, -8, 1, 6, 8, 12, 15\}$, $A \backslash B = \{-18, -8{,}12\}$, $A \cap B = \{-13{,}8\}$; **8.13.** $A \cup B = \{3;\ 5;\ 6;\ 9; 10;\ 12;\ 15;\ 20\}$, $A \backslash B = \{5;\ 10;\ 20\}$, $A \cap B = \{15\}$; **8.14.** $A \cup B = \{5{,}15{,}50{,}51{,}52{,}53{,}55\}$, $A \backslash B = \{50{,}52{,}53\}$, $A \cap B = \{51{,}55\}$; **8.15.** а) $\{3;5\}$, б) $\{0\}$,в) $\varnothing$, г) $\{1;2;3\}$;

8.16.



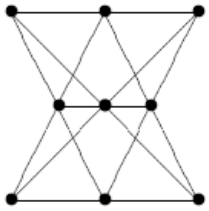
8.17. 1) $z_1 = \frac{-3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}$; $z_2 = \frac{-3}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}i$; 2) $z_1 = \frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i$; $z_2 = \frac{-3}{4} - \frac{4}{5}i$ **8.18.** а) $7 + 4i$; б) $7 + i$; в) $9 - 4i$; г) $-9 - 6i$; д) $-i$; е) $10i$; ж) $-6 + 6i$; з) $2i$; и) $-1 - 5i$; к) 6; л) $-i$; м) $-\frac{9}{41} - \frac{1}{41}i$; **8.19.** A-3, B-4, C-3, D- 5, E-3, F- 4, K-6; **8.20.** A-3, B-5, C-3, D- 4, E-3, F- 5, G-3, H- 4, K-6; **8.21.** V={V_1, V_2, V_3, V_4, V_5,

$V_6\}$, E={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}, P={(V_1, V_4), (V_4, V_3), (V_3, V_5), (V_5, V_2), (V_2, V_6)}; **8.22.** Степени неориентированного графа G_1: $\rho(1) = 3,\ \rho(2) = 4, \rho(3) = 3, \rho(4) = 2$, Степени ориентированного графа G_2: ρ_1 определяет количество выходящих ребер: $\rho_1(1) = 2,\ \rho_1(2) = 3, \rho_1(3) = 1, \rho_1(4) = 0$; ρ_2 определяет количество входящих в вершину ребер: $\rho_2(1) = 1,\ \rho_2(2) = 1, \rho_2(3) = 2, \rho_2(4) = 2$; **8.23.** 12; **8.24.** 10; **8.25.** 15; **8.26.** 5; **8.27**. Петр Сергеев, Иван Петров, Сергей Иванов; **8.28.** 1 – красная, 2 – черная, 3 – синяя, 4 – зеленая, 5 – белая. Указание: Строится граф для отношения: x едет сзади y; **8.29**.

$A \cup B$	$A \cap B$	$A \backslash B$	$B \backslash A$
{1; 2; 3; 4; 8; 9; 10}	{4; 8}	{1; 3; 9}	{2; 10}
{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9}	{1; 3; 5}	{2; 4; 6}	{9}
{–2; –1; 0; 1; 2}	{–2}	{2}	{–1; 0; 1}

8.30. а) $\{x \mid x = 2k;\ k \in N\}$; б) $\{x \mid x = 2n - 1;\ n \in Z\}$; в) $\{x \mid x^2 + 5 = 0\} \equiv \varnothing$; г) $\{x \in N \mid x < 4\} \equiv \{1; 2; 3\}$; **8.31.** C вообще не содержит ни одного натурального числа. Действительно, $1 \neq A$, $1 \neq B$, и поэтому $1 \notin C$; **8.32**. а) верно; б) неверно; в) неверно; г) верно; д) верно; е) верно; **8.33.** а) неверно; б) неверно; в) верно; г) верно; **8.34.** б, в, д; **8.35.** б, г; **8.36.** а, г, д; **8.37.** б, д; **8.38.** верно; **8.39.** верно; **8.40.** $-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$; **8.41.** $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$; **8.42.** 0; **8.43.** $3 - 4{,}5i$; **8.44.** 16; **8.45.** -8; **8.46.** $-\frac{31}{125} - \frac{142}{125}i$; **8.47.** $z = 2\left(cos\frac{11\pi}{6} + isin\frac{11\pi}{6}\right)$, $z = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}$; **8.48.** $z = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$; $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$; **8.49.** $z = 3(cos0° + isin0°)$; $z = 3e^{2\pi i}$; **8.50.** $z = 3(cos\pi + isin\pi)$; $z = 3e^{\pi i}$; **8.51.** $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right)$; $z = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$; **8.52.** $z = 2\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)$; $z = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$; **8.53.** $z = 4\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$; $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$; **8.54.** $z = 5\sqrt{2}(\cos arctg7 - i\ sinarctg7)$; $z = 5\sqrt{2}e^{-i\ arctg\ 7}$; **8.55.** 3 числа; **8.56.** 20; **8.57.** 8; **8.58.** 4 и 12; **8.59.** а) 2, б) 4, в) 8, г) 25=32, д) 210=1024; **8.60.** а) $A \backslash (B \cup C)$, б) $A \cap C$, в) $(C \backslash B) \cup (A \cap B)$, г)

$C\setminus(A \cup B) \cup (A \cap B)$, д) $(B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B)$, е) $(A \cup B)\setminus C$; **8.61.** $(-1; 4)$; $(1; 4)$; **8.62.** $(2; 1)$; $(2; -1)$

8.65.  ; **8.66.** нельзя.

9. Теория вероятностей

9.1. 0,9. **9.2.** 1140. **9.3.** 210. **9.4.** 38760. **9.5.** 4080. **9.6.** а) 112; б) 2520. **9.7.** 132. **9.8.** 45. **9.9.** 825. **9.10.** 120. **9.11.** а) 1771; б) 33649. **9.12.** 336. **9.13.** 5040. **9.14.** 376992. **9.15.** 1320. **9.16.** а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$; в) 0. **9.17.** а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{120}$. **9.18.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$. **9.19.** $\frac{6}{15}$. **9.20.** 0,7. **9.21.** 0,5. **9.22.** 0,533. **9.23.** событие B. **9.24.** 0,95. **9.25.** 0,533. **9.26.** а) 0,095; б) 0,43; в) 0,48; г) 0,525. **9.27.** 0,25. **9.28.** 0,01. **9.29.** $P(A) = 0{,}934$; $P(B) = 0{,}868, P(C) = 0{,}29$. **9.30.** $\frac{1}{2}n(n-1)$. **9.31.** а) 2016; б) 992; в) 1024. **9.32.** 371. **9.33.** Да. **9.34.** 270. **9.35.** 0,556. **9.36.** 0,5. **9.37.** 0,3. **9.38.** $\frac{1}{6}$. **9.39.** 0,381. **9.40.** 0,282. **9.41.** 0,186. **9.42.** 0,55. **9.43.** 0,51. **9.44.** 0,07. **9.45.** 0,054. **9.46.** а) 0,36; б) 0,01; в) 0,48. **9.47.** 0,217. **9.48.** 0,17. **9.49.** 0,496. **9.50.** 0,83. **9.51.** 0,23. **9.52.** 0,111. **9.53.** 0,523. **9.54.** 0,5. **9.55.** 0,375. **9.56.** 0,94. **9.57.** 0,152. **9.58.** а) 0,00035; б) 0,23. **9.59.** 0,055. **9.60.** 0,018. **9.61.** 0,055. **9.62.** 0,175. **9.63.** 0,002. **9.64.** 0,529. **9.65.** 0,79. **9.66.** 0,26. **9.67.** $x = 1$. **9.68.** 1814400. **9.69.** 0,3. **9.70.** 0,2. **9.71.** 0,477. **9.72.** а) 0,25; б) 0,333; в) 0,5. **9.73.** *а*) $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; *б*) $\frac{1}{8}$. **9.74.** 28. **9.75.** 24. **9.76.** 0,94. **9.77.** 280. **9.78.** а) 0,19; б) 0,44; в) 0,00006. **9.79.** 0,025. **9.80.** 0,233. **9.81.** 0,045. **9.82.** 0,24. **9.83.** 0,7.

10. Математическая статистика

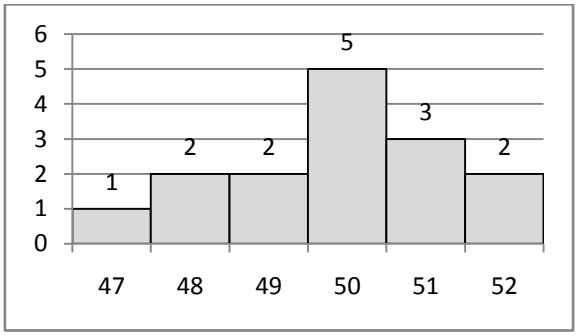
10.1. а) 0,4; б) 0,2; в) 0,1; г) нет решения

10.2.

217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227
1	2	3	4	2	2	1	1	1	2	1

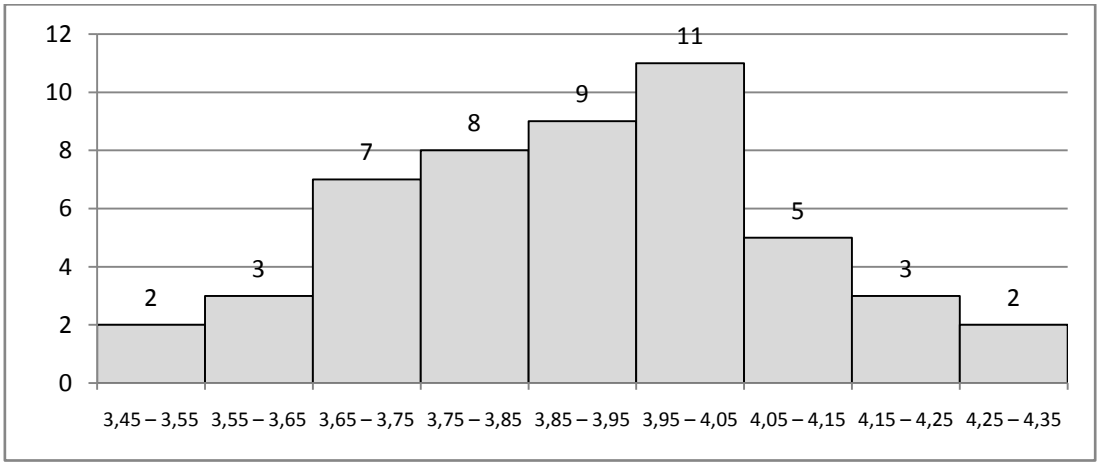
10.3. 2; **10.4.** 241; **10.5.** $CV_{\text{АД}} = 4{,}5\%$, $CV_{\text{ЧСС}} = 3{,}3\%$; **10.6.** 1,1; **10.7.** *а) 4,7; 3,01; б) 0,1; 1,29; в) 8; 8; г) 15,25;31,2.*;

10.8.



10.9. *2,84*; **10.** *M(X)=3,4; D(X)= 0,03*; **10.11.** *M(X)*=8,5; *D(X)= 2,25;* **10.12.** *M(X)=5,0; D(X)= 6,0;*

10.13.



10.14. $M(X) = 4,\ D(X) = 1,\ \sigma = 1$; **10.15.** а) 0,5; б) 2,45; **10.16.** 2,01;

10.17.1,05; **10.18.** 1,76; **10.19.** *а)* n=10; Δ=4; M(x)=4,4; D(x)=2,84, σ=1,7; Cv=38,6%; *б)* n=10; Δ=3; M(x)=8,5; D(x)=1,05, σ=1,02; Cv=11,8%; **10.20.** *Mo=3; Me=3; M(X)=2,8; D(X)= 7,36; σ=2,7; Cv=96%;* **10.21.** *M(X)= 3,4, D(X)= 5,04; σ=2,2; Cv=43,7%*; **10.22.** *M(X)=134, D(X)= 150,22, σ=12,3; Cv=9,2%*; **10.23.** *M(X)=90; D(X)=50,4; σ=7,07; Cv=7,9%*;

10.24. *M(X)=155,1; D(X)=103,6; σ=10,2; Cv=6,6%*; **10.25.** *M(X)=95,6; D(X)=781,7; σ=28; Cv=29,3%*; **10.26.** *M(X)=72,1; D(X)=70,7; σ=8,4; Cv=11,7%*; **10.27.** *M(X)=72; D(X)=17; σ=4,1; Cv=5,7%;* **10.28.** *M(X)=19,5, D(X)=7,8 σ=2,8; Cv=14,4%*; **10.29.** *M(X)=2,8, D(X)=0,044 σ=0,2; Cv=7,1%*; **10.30.** *M(X)=58; D(X)=20,3; σ=4,5; Cv=7,8%*;

10.31. *M(X)=93; D(X)=6; σ=2,4; Cv=2,6%*; **10.32.** *M(X)=36,9 D(X)=0,04; σ=0,2; Cv=0,5%*;

10.33. *M(X)=98,8 D(X)=60,94; σ=7,8; Cv=7,9%*; **10.34.** M(X)=0,8; D(X)=17;

10.35. $M(X) = 0{,}68$, *D(X)= 0,00013*, $\sigma = 0{,}011$; **10.36.** $M(X) = 9{,}47$, *D(X)= 0,02*;

10.37.

Число сданных экзаменов	0	1	2
p_i	$P_1 = 0{,}03$	$P_2 = 0{,}34$	$P_3 = 0{,}63$

10.38.

x_i	0	100	1000
p_i	$P_1 = 0{,}89$	$P_2 = 0{,}1$	$P_3 = 0{,}01$

10.39.

X	0	1	2	3
P	$p_1 = 0$	$p_2 = \frac{1}{5}$	$p_3 = \frac{3}{5}$	$p_3 = \frac{1}{5}$

10.40. *n=10; Δ=81-68=13, M(X)=74,3, D(X)=105,3 σ=10,3 CV=13,9%*;

10.41. *n=15; Δ=7-3=4, M(X)=4,9, D(X)=2,9 σ =1,7, CV=34,7%*;

10.42. *n=10 Δ=12, M(X)=11, D(X)= 11,2, σ=3,3, CV=30%*;

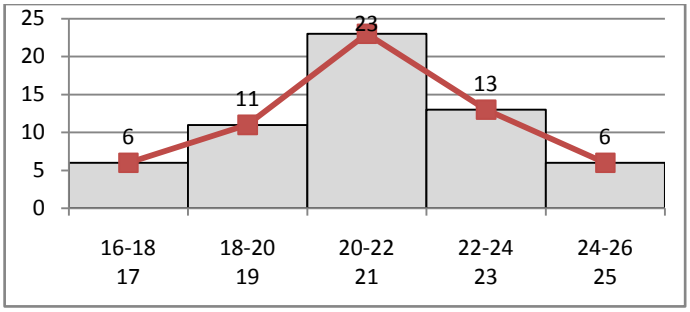
10.43. *n=10; Δ=7, M(X)= 23,6, D(X)= 8,9, σ=3, CV= 12,7%*;

10.44. *n=10; Δ= 11; M(X)=13,6; D(X)= 7,6; σ=2,8; CV =20,6%*

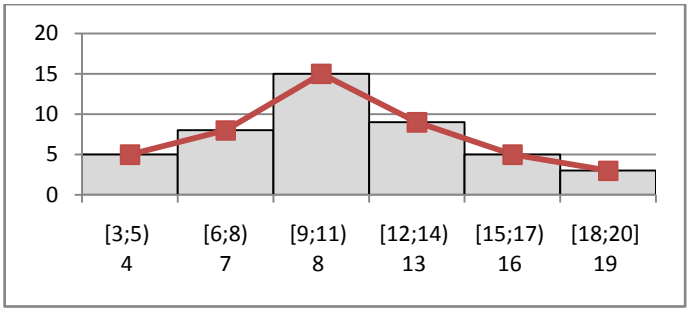
10.45. *M(X)=166, D(X)=33,44*;

10.46. второй стрелок стреляет лучше, исходя из дисперсии $D(X) = 14, D(Y) = 4{,}2$; **10.47.** 2,3%; **10.48.** 47%;

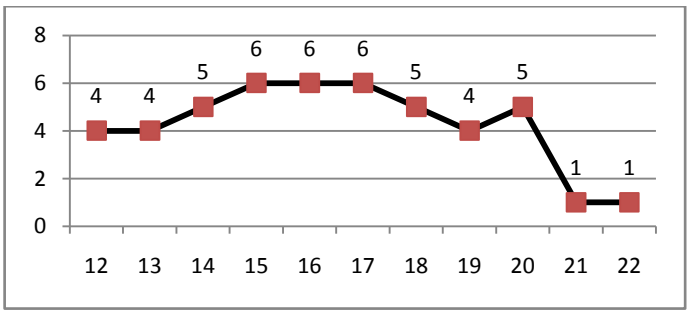
10.49. Mo = 21, Me=21, M(X)=20,5



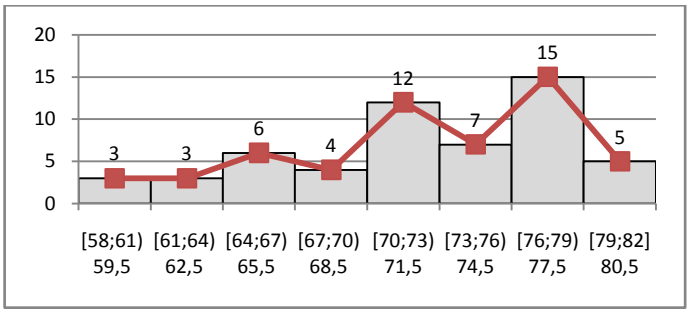
10.50. Me= Mo = 11, M(X)=10,7 D(X)=16,037



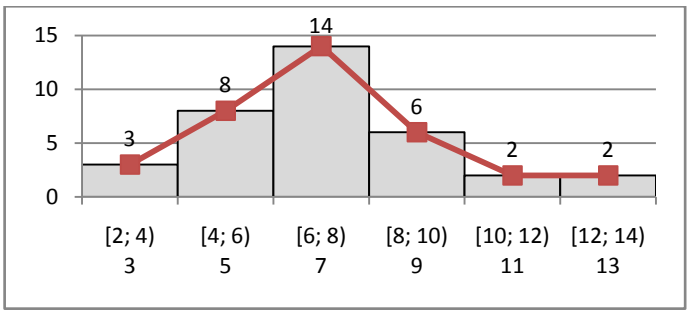
10.51. Mo:15,16,17, Me=16, M(X)=16,3 D(X)=6,822



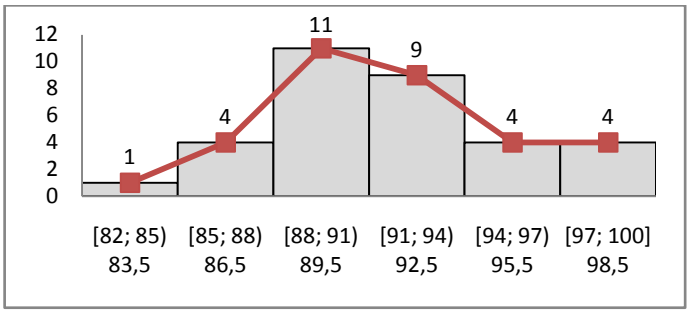
10.52. Mo=76, Me=72, M(X)=71,8



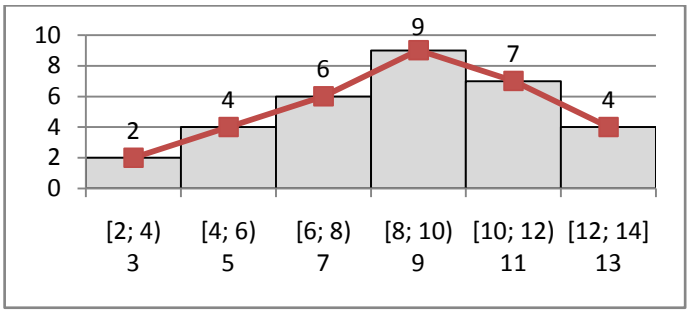
10.53. Mo=6, Me=6, M(X)=6,66



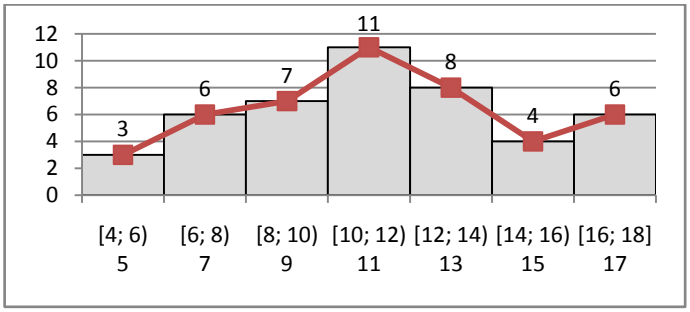
10.54. Mo=90, Me=91, M(X)=91,18



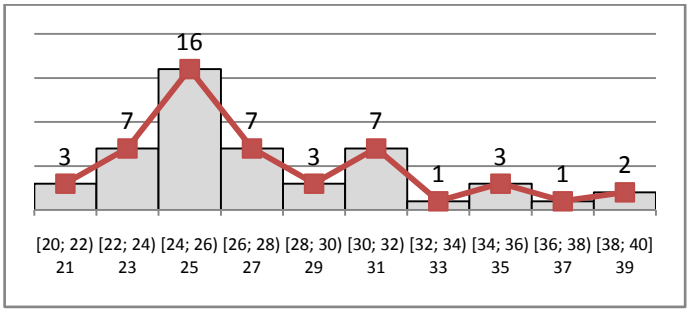
10.55. Mo=8, Me=8, M(X)=8,2



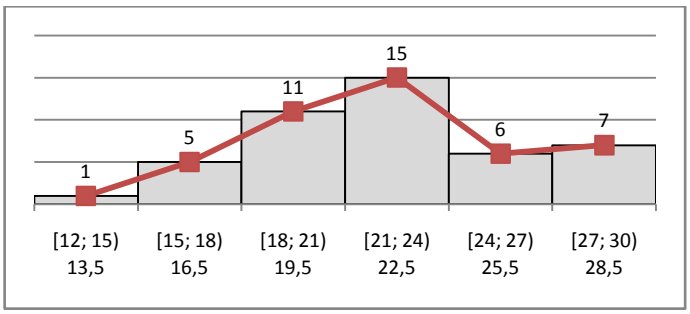
10.56. Mo=11, Me=11, M(X)=10,9



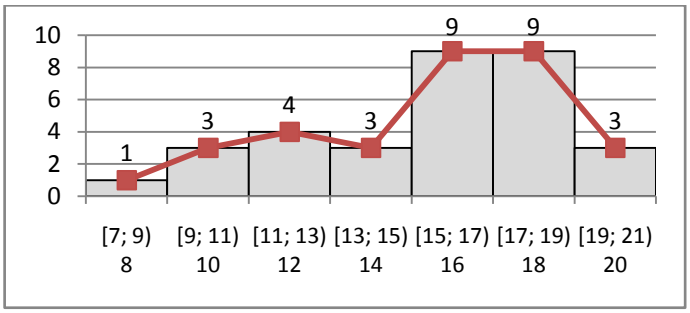
10.57. Mo=24; 25, Me=25, M(X)= 26,92, D(X)=20



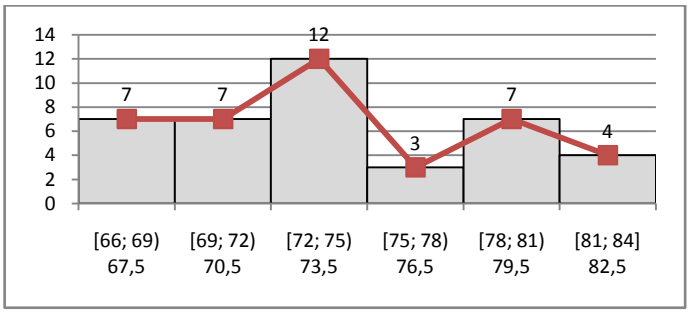
10.58. Mo=21, Me=21, M(X)=21, 8



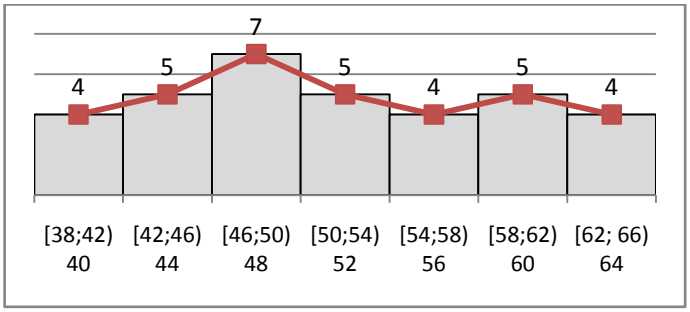
10.59. Mo=15, Me=15,5, M(X)=15



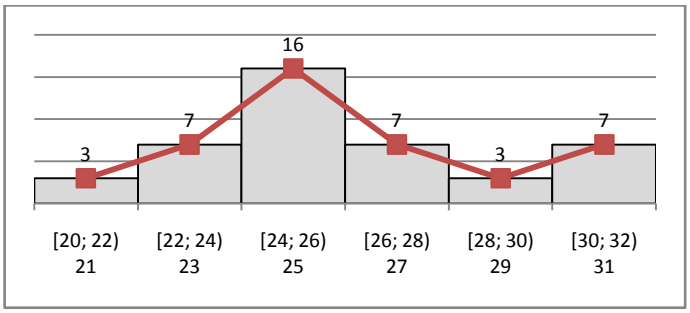
10.60. Mo=70;74, Me=74, M(X)=73,75



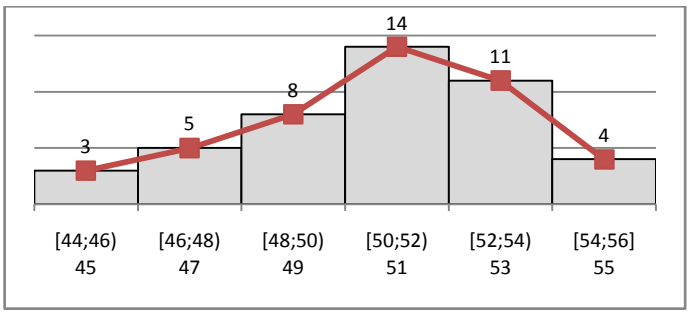
10.61. Mo=45,48,51, Me=50,5



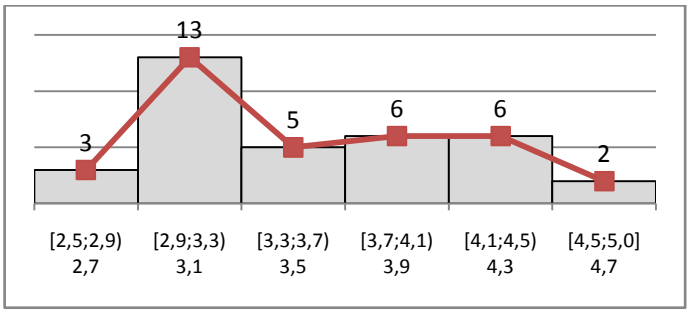
10.62. Mo=32, Me=32, M(X)=32



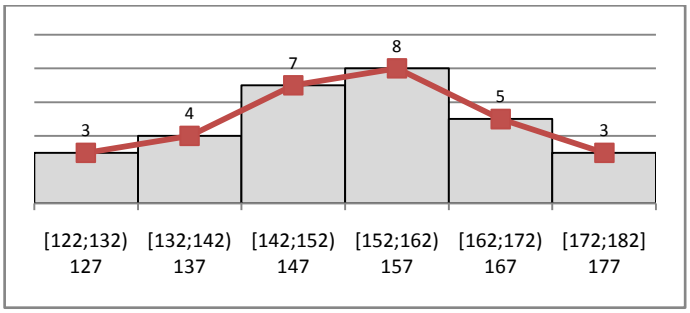
10.63. Mo=50; 51, Me=50



10.64. Мо=3,2, Ме=3,3



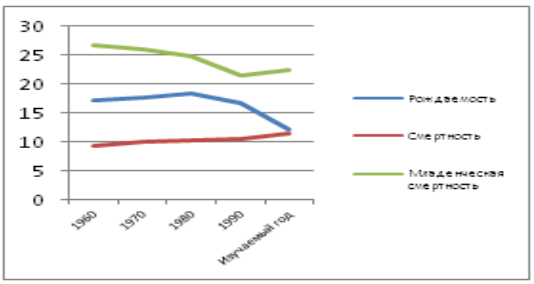
10.65. Мода не определяется, Ме=152,5



11. Медицинская статистика. Медико-демографические показатели.

11.1. 9‰. **11.2.** 8‰, очень низкий. **11.3.** 20‰, средний. **11.4.** 17,4‰, высокий. **11.5.** а) 20 ‰, средний; б) 6‰, низкий; в) 14‰. **11.6.** а) 0,18927; б) 0,20837; в) 0,28602; г) 0,24018. **11.7.** 45,9%. **11.8.** а) 55,07%; б) 44,93%. **11.9.** а) 18‰, средний; б) 8‰, низкий; в) 6,8% низкий; г) 3,2% низкий. **11.10.** от 0 до 1 года: 5,56%; от 1 до 3 лет: 13,20%; от 4 до 6 лет: 24,01%; от 7 до 10 лет: 29,41%; от 11 до 14 лет: 27,82%. **11.11.** а) 56,63%; б) 13,25%; в) 12,05%; г) 4,82%; д) 2,41%; е) 1,51%; ж) 1,2%; з) 8,13%. **11.12.** а) 60%; б) 19,6%; в) 22%; г) 11%; д) 4,4%; е) 3%; ж) 32,67%; з)36,67%; и) 18,33%; к) 7,33%; л) 5%. **11.13.** от 0 до 15 лет: 17%; от 15 до 49 лет: 50%; старше 50 лет: 33%; Тип населения – регрессивный; коэффициент рождаемости: 7,4‰, очень низкий; коэффициент

смертности:17,2‰, высокий; естественный прирост: -9,8‰. **11.14.** а) 20‰; б) 10 ‰; в) 14,1‰. **11.15.** а) 16; б) 21,5; в) 96,5%. **11.16.** а) 17; б) 21; в) 88,9%. **11.17.** 1) от 0 до 15 лет: 24%; от 15 до 49 лет: 50%; старше 50 лет: 26%; 2) коэффициент рождаемости: 12,3‰; коэффициент смертности: 11,5‰; коэффициент младенческой смертности: 22,4‰; 3) Рождаемость по сравнению с предыдущими показателями уменьшилась, смертность и младенческая смертность увеличились.

4) 

. **11.18.** а) 30‰; б) 16,6‰; в) 10‰; г) **44%**; д) **33%**; е) **14,8%**; ж) **7,4%**.

11.19.

год	Показатели первичной заболеваемости	показатели нарушения осанки	Коэффициент смертности
1994	982,4751	233,1597	1752,487
1995	984,352	231,493	1564,801
1996	984,366	250,6986	1563,396
1997	986,288	308,2826	1371,196
1998	987,2692	319,9613	1273,083
1999	985,1854	303,7436	1481,463
2000	985,6042	283,0508	1439,58
2001	985,1517	296,88	1484,827
2002	983,8191	297,1682	1618,093
2003	983,8489	354,2557	1615,11

11.20. а) 11,25%; б) 3,13%; в) 4 обр./год; г) 12 чел/день; д) 3 чел/час; е) 4 чел/день; ж) 27,27%; з) 8; и) 3%. **11.21.** а) 3,7%; б) 4 обр./год; в) 13 чел/день; г) 4 чел/час; д) 7 чел/день; е) 34%; ж) 6; з) 23%. **11.22.** а) 3,6%; б) 2 обр./год; в) 8 чел/день; г) 3 чел/час; д) 2 чел/день; е) 18,5%; ж) 6; з) 4%; и) 2%.

11.23. 1) 5857; 2) 6%. **11.24.** 1) 5250; 2) 4,8%; 3) 102,4%. **11.25.** в 2009 г.: школьники – 497, дошкольники – 203, неорганизованные – 120; в 2010 г.:

школьники – 529, дошкольники – 193, неорганизованные – 118. **11.26.** в 2009 г.: II А– 14, II Б – 30, III – 1; в 2010 г.: II А– 13, II Б – 34, III – 3. **11.27.** в 2009 г.: I группа – 352, II группа – 332, III группа – 117, IV группа – 19; в 2010 г.: I группа – 629, II группа – 157, III группа – 59. **11.28.** в 2009 г.: 1) 43, 2) 215, 3) 645; в 2010 г.: 1) 43, 2) 172, 3) 774. **11.29.**

		2009 год		2010 год	
		Абс.	%	Абс.	%
Всего детей до года		**43**	**100**	**54**	**100**
На грудном вскармливании	До 6 месяцев	**11**	25,6	9	**16,3**
	Более 6 месяцев	**26**	60,5	38	**69,8**
	Всего	**37**	86	47	87
На смешанном вскармливании		**1**	2,3	3	**4,7**
На искусственном вскармливании		**5**	11,6	5	**9,3**

11.30.

Показатели	2009год		2010год	
	абс.	%	абс.	%
Выше среднего	11	25,6	11	25,6
Среднее	28	65,1	29	67,4
Ниже среднего	4	9,3	3	7,0
Гармоничное	34	79,0	32	74,4
Дисгармоничное	9	21,0	11	25,6

11.31. а) 2; б) 40%; в) 22 чел/день; г) 54 чел/день; д) 5-6 чел/день; е) 5%; ж) 15%; з) 0,75%. **11.32.** а) 2,6; б) 69%; в) 16%; г) 50%; д) 1,2%; е) 0,5%.

12. Математические методы в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала. Решение задач на проценты.

12.1. а) 0,1%, б) 0,04%, в) 0,05%, г) 0,4%, д) 0,45%; **12.2.** а) 1:250, б) 1:1250, в) 1:20000, г) 1:400, д) 1:1000; **12.3.** 12 человек; **12.4.**50%; **12.5.** 200 человек; **12.6.** 4,725 л; **12.7.** 59,5 л; **12.8.** 13 кг; **12.9.** 2,57 %; **12.10.** 26,67 %; **12.11.** 0,05

%; **12.12.** белок 0,2 кг, неорг. веществ 0,05 кг, воды 2,3 кг; **12.13.** 750 л; **12.14.**2,5%, 60 л; **12.15.**15%, 1,7 л; **12.16.** 12г; **12.17.** 20л; **12.18.** 0,5 кг и 9,5 кг; **12.19.** 20%; **12.20.** 20л; **12.21.** 1 л; **12.22.** 50г; **12.23.**0,9%; **12.24**.75г; **12.25.** 1,5 г; **12.26.** 0,2 мг; **12.27.** Цветков ромашки, побегов багульника, цветков ноготков, травы фиалки по 12 г, корней солодки 9г, листьев мяты 3г; **12.28.** 1:50; **12.29.**а) 0,2 и 1,8 л; б) 0,3 и 0,7 л; в) 0,05 и 0,95 л; **12.30.** 50 мл**; 12.31.** 1 кг и 4 кг; **12.32.** 30%; **12.33.** 6,67 кг; **12.34.**34%; **12.35.** 23,75%; **12.36.** 2,4 кг и 0,6 кг; **12.37.** 0,2 кг; **12.38.** 80г; **12.39.** 30 г и 45 г; **12.40.** 0,94 кг; **12.41.** 20%; **12.42.** 45 кг; **12.43.** 4,55 г; **12.44.** 156 г; **12.45.** 120 г; **12.46.** 18 г и 36 г; **12.47.** 64г; **12.48.** 20 г; **12.49.** 10л; **12.50.** 500 г; **12.51.** 125г; **12.52.** 17,5%; **12.53.** по 250 г; **12.54.** 10л; **12.55.** 25,5%; **12.56.** 20%; **12.57**. 1550г; **12.58.**1кг и 2 кг; **12.59.** 440 г и 100 г; **12.60.** 875г; **12.61.** 159 г; **12.62.** воды понадобится 2,65 л, спирта 96% - 7,1 л, хлоргексидина биглюконата 20% - 0,25 л; **12.63.** 4 л; **12.64.** 80%; **12.65.** 266 ккал, 64,88 г белков; **12.66.** 660 ккал, 70,97 г жиров; **12.67.** а) 368 ккал, 89,76 г; б) 384 ккал, 93,66 г; в) 400 ккал, 97,56 г.; **12.68.** а) 475 ккал; б) 575 ккал; в) 600 ккал; г) 625 ккал; **12.69.** а) 588 ккал, 63,23 г; б) 616 ккал, 66,24 г; в) 644 ккал, 69,25 г; **12.70.** а) 1210 ккал, 295,12 г, б) 12,65 ккал, 308,54 г, в) 1320 ккал, 321,95 г.; **12.71.** а) 12 г, б) 14 г, в) 18 г, г) 20 г; **12.72.** а) 37,5 г, б) 50 г, в) 62,5 г, г) 75 г; **12.73.** а) 2 г; б) 6 г; в) 14 г; **12.74.** а) на 2 г; б) на 2,5 г.; **12.75.** на 20,6%; **12.76.** 107; **12.77.** 66; **12.78.** 62; **12.79.** на 28%; **12.80.** на 26%; **12.81.** 75,2 кг; **12.82.** 19,14 г.

13. Математические методы в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала.

13.1. 64см; **13.2.** 72,5 см; **13.3.** 80 см; **13.4.** 10см; **13.5.** 15 см; **13.6.** 7,1 кг; **13.7.** 9,35 кг; **13.8.** 6,6 кг; **13.9.** 7,7кг; **13.10.** 9,7 кг; **13.11.** 46 кг; **13.12.** 806 мл; **13.13.** 686 мл; **13.14.** 80 мл; **13.15.** 823 мл; **13.16.** а) 0,1 мл; б) 0,2 мл; в) 0,1 мл и 2 ЕД; **13.17.** а) 25; 75; б) 2; 18 в) 2; 44; г) 20; 180; **13.18.** а) 6 ЕД; б) 16 ЕД; в) 30 ЕД; г) 48 ЕД; д) 70 ЕД.; **13.19.** а) 0,1 мл; б) 0,5 мл; в) 1 мл; г) 2 мл; **13.20.** 6 мл;

4 мл; **13.21.** а) 5 мл; 3 мл; б) 2,5 мл; 1,5 мл; **13.22.** а) 10 мл; 5 мл; б) 5 мл; 2,5 мл; **13.23.** 14 кап/мин; **13.24.** 30 кап/мин; **13.25.** 33 кап./мин; **13.26.** 50 кап./мин; **13.27.** 67 кап./мин; **13.28.** 3600 мл; **13.29.** 2880 мл; **13.30.** 1 капсула; **13.31.** ½ таблетки; **13.32.** 2 таб.; **13.33.** 2таб; **13.34.** 1,5 таб; **13.35.** 4 мл; **13.36.** 3 г - разовая, 9 г - суточная; **13.37.** 15 мл; **13.38.** 1,5 мл; **13.39.** 2 мл; **13.40.** 0,5 мл; **13.41.** 3 мл; **13.42.** 28 капс; **13.43.** 42 капс.; **13.44.** разовая доза 0,45 г, суточная доза 1,35 г, раствора хватит на 10 приёмов, 3 дня; **13.45.** 60 мл; **13.46.** а) 30 ЕД; б)25 ЕД; в) 30ЕД; г) 20 ЕД; **13.47.** 15 ЕД; **13.48.** 28 ЕД; **13.49.** 10 ЕД.; **13.50.** 50 мл; **13.51.** 6,25 мл; **13.52.** 1 мл, не соответствует норме; **13.53.** разовый прием 3,04 мл, не соответствует норме; **13.54.** 4,5 мл, соответствует норме; **13.55.** 2 капс, не соответствует норме; **13.56.** 0,05 мл; **13.57.** 3 мл; **13.58.** 3 капс.; **13.59.** 2 капс.; **13.60.** 5 капс.; **13.61.** набрать 4 мл 10% раствора и добавить 16 мл изотонического раствора NaCl; **13.62.** 1,4 мл **13.63.** 2 ампулы; **13.64.** 20 мл, 2 ампулы; **13.65.** 0,05 мл; **13.66.** 300 мл; **13.67.** 180 мл; **13.68.** 296,73 см^3; **13.69.** 141,3 см^3; 188,4 см^2; **13.70.** 261,7 см^3; **13.71.** 251,2 см^3; **13.72**. 745,75 см^3, 596,6 см^2; **13.73.** 14,13 см^3; **13.74.** 61,544 см^3; **13.75.** 5760 см^3; **13.76**. 24000 см^3; **13.77.** 2,7 л; **13.78.** 7,6 л/мин;

13.79. 3400 г; **13.80**. 3080 г; **13.81.** 3325 г; **13.82.** 10,9%; **13.83.** 4,19 мкм^3; **13.84.** $1{,}05\cdot10^{-12}$ мг; **13.85.** на 95%; **13.86.** $5\cdot10^7$; **13.87.** 7 500 000; **13.88.** ожирение II степени; **13.89.** ожирение I степени; **13.90.** 1600 ккал; **13.91.** ИМТ=29,4, избыточное питание; **13.92.** ожирение II степени, 2295 ккал; **13.93.** ожирение II степени, 2091 ккал; **13.94.** а) 70 г жиров, 280 г. углеводов, б) 75 г жиров, 300 г углеводов; в) 80 г жиров, 320 г углеводов; г) 85 г жиров, 340 г углеводов; **13.95.** а) 40г; б) 42,5 г; в) 45 г; г) 47,5 г растительных жиров; **13.96.** а) 9 г; б) 10,5г; в) 12,75 г.

14. Матрицы, определители. Решение систем уравнений методом Крамера

14.1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; **14.2.** $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; **14.3** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 10 \\ 2 & 19 & 0 \end{pmatrix}$;

14.4. $\begin{pmatrix} -1 & 13 & 0 \\ -12 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; **14.5.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; **14.6.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; **14.7.** $\begin{pmatrix} 4 & 19 & 11 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 17 & 12 \end{pmatrix}$;

14.8. $\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ -66 & 51 \end{pmatrix}$; **14.9.** $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 0 & -6 & -10 \\ -9 & -5 & -9 \end{pmatrix}$; **14.10.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -5 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

14.11. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & -4 \\ 11 & -7 & 8 \\ 17 & 0 & -9 \end{pmatrix}$; **14.12.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 18 \\ -3 & -12 & 11 \\ 12 & 10 & -15 \end{pmatrix}$; **14.13.** 5; **14.14.** –38; **14.15.** –42;

14.16. 63; **14.17.** – 83; **14.18.** 17; **14.19.** –13; **14.20.** 4;

14.21. $x_1 = 5,\ x_2 = -1, x_3 = -4$; **14.22.** $x_1 = 0,\ x_2 = -7, x_3 = 5$;

14.23. $x_1 = 1,\ x_2 = 3, x_3 = -1$; **14.24.** $x_1 = 0,\ x_2 = 4, x_3 = 5$;

14.25. $x_1 = 1,\ x_2 = 6, x_3 = 5$; **14.26.** $x_1 = 3,\ x_2 = -6, x_3 = -1$;

14.27. $x_1 = 7,\ x_2 = 5, x_3 = 1$; **14.28.** $x_1 = 5,\ x_2 = -1, x_3 = -4$;

14.29. $x_1 = -2,\ x_2 = 4, x_3 = 1$; **14.30.** $x_1 = 1,\ x_2 = 0, x_3 = -5$

14.31. $x_1 = 5,\ x_2 = -1, x_3 = 1$; **14.32.** $x_1 = 14{,}5,\ x_2 = 3, x_3 = 6{,}5$

14.33. $x_1 = 1,\ x_2 = -1, x_3 = 4$; **14.34.** $x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 4$

14.35. $x_1 = -1,\ x_2 = 4, x_3 = 1$; **14.36.** $x_1 = 1,\ x_2 = -1, x_3 = 1$

14.37. $x_1 = -1,\ x_2 = 5, x_3 = -6$; **14.38.** $x_1 = -3,\ x_2 = 3, x_3 = 2$

14.39. $x_1 = 0,\ x_2 = 10, x_3 = -1$; **14.40.** $x_1 = -1,\ x_2 = 0, x_3 = 2$

14.41. $x_1 = -1{,}4,\ x_2 = 2{,}2,\ x_3 = 0{,}2$; **14.42.** $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5$

14.43. $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$; **14.44.** $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$

14.45. $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$; **14.46.** $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

14.47. $x_1 = -2,\ x_2 = -4,\ x_3 = 1$; **14.48.** $x_1 = -1,\ x_2 = -4,\ x_3 = 1$

14.49. $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$